Plantes, spirales et nombres, Neuchâtel 2010

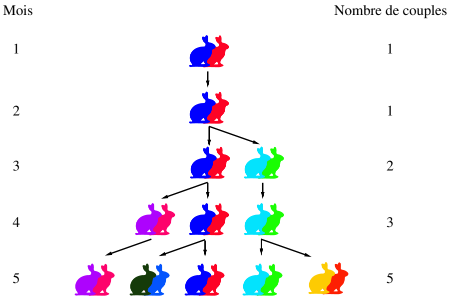
10 novembre 2010

UNIVERSITAS FRIBURGENSIS

EN 1202, Fibonacci s'intéressa au problème de croissance d'une population de lapins dans des circonstances idéales.

- on commence avec un couple de jeunes lapins,
- un lapin âgé d'un mois est capable de se reproduire,
- un couple de lapins (en âge de se reproduire) donne naissance à un autre couple de lapins tous les mois.

Fibonacci se posa la question suivante : combien y aura-t-il de couples de lapins après une année ? La figure ci-dessous illustre l'évolution du nombre de couples de lapins au fur et à mesure des mois.



Evolution idéale d'une population de lapins

On remarque que la suite formée par les nombres de couples après chaque mois est la suivante :

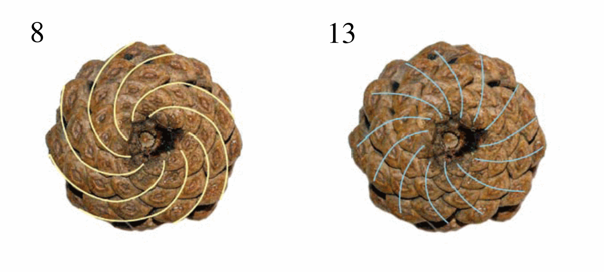
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,...

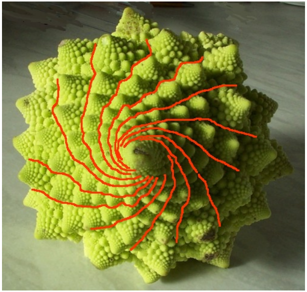
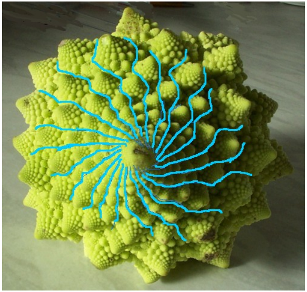
Cette suite de nombres est appelée **suite de Fibonacci** et peut être formée de la manière suivante :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & 1 & 1 \\
 & & & & + \\
 & & 1 & 1 & \color{red}{2} \\
 & & & + & \\
 & 1 & 1 & 2 & \color{red}{3} \\
 & & & + & \\
1 & 1 & 2 & 3 & \color{red}{5}
\end{array}
$$

La construction de la suite de Fibonacci

On peut retrouver cette suite de nombres étonnamment souvent dans la nature.
Par exemple, les pives sont composées de 8 spirales dans le sens horaire et de 13 spirales dans le sens antihoraire, deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci :

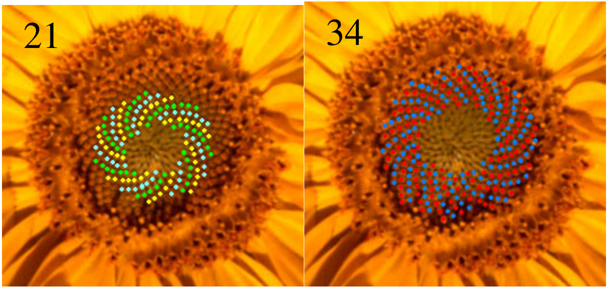


La romanesco et la suite de Fibonacci

Le romanesco possède 13 spirales dans le sens horaire et 21 spirales dans le sens anti-horaire, toujours deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci.

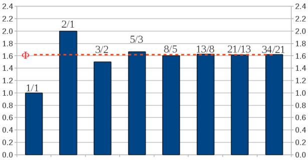
Le coeur d'un tournesol est composé de fleurons arrangés en spirales, 21 spirales dans le sens horaire et 34 spirales dans le sens anti-horaire.



Le coeur d'un tournesol

En observant la suite de Fibonacci, on peut remarquer que si l'on divise chaque nombre de la suite par son prédécesseur, on obtient une suite de nombre qui se rapproche petit à petit d'un nombre Φ appelé nombre d'or, dont la valeur est :

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$$

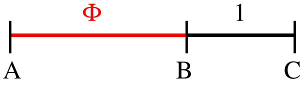


Le rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci

UNIVERSITAS FRIBURGENSIS

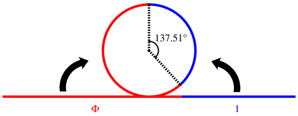
Ce nombre est le seul nombre positif possédant la propriété géométrique suivante :

$$\frac{1+\Phi}{\Phi} = \frac{\Phi}{1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\text{longueur de AC}}{\text{longueur de AB}} = \frac{\text{longueur de AB}}{\text{longueur de BC}}$$



Proportion d'or

L'angle d'or est égal à environ 137.51 ° et est obtenu en prenant la section d'or de la circonférence du cercle :



Angle de divergence constant

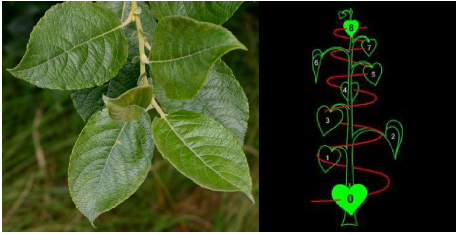
FIGURE: L'angle entre deux feuilles consécutives est $\pm$ constant : c'est l'**angle de divergence**, qui est égal à l'angle d'or $\phi \approx 137.5$ deg.

A gauche, un chapiteau corinthien typiquement orné de feuilles d'acanthe ; à droite, des feuilles d'acanthe.

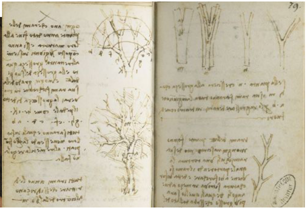

L'observation des arrangements des feuilles remonte à l'Antiquité : on trouve dans les œvres de **Théophraste** (370 - 285) et de **Pline l'Ancien** (23 - 79) l'indication que les Anciens distinguaient divers types d'arrangements et s'en servaient pour identifier les plantes. Les représentations de plantes dans l'art grec et égyptien montrent aussi la finesse de leur observation (voir figure 1).

La phyllotaxie spiralée

A gauche, un rameau de salix cinerea : l'ordre qui régit la disposition des feuilles ne saute pas aux yeux. A droite, un schéma où l'on a tracé la spirale génératrice, en rouge.



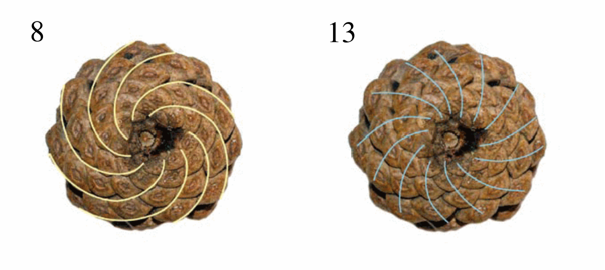
Léonardo da Vinci (1453-1519) semble avoir saisi l'ordre de la disposition spiralée ; voici la description qu'on en trouve dans l'un de ses manuscrits : **si on prend une feuille référence, la sixième feuille rencontrée en remontant la branche est alignée au-dessus de la première, autrement dit, les feuilles sont arrangées par cycles de cinq**



L'astronome **Johannes Kepler (1571-1630)** a eu lui aussi une intuition surprenante : il a été le premier à associer la suite de Fibonacci et la phyllotaxie. Il avait constaté l'importance du nombre cinq dans le monde végétal : par exemple, il identifie des cycles de cinq feuilles comme Da Vinci et remarque que les pommes ont cinq divisions pour leurs pépins. Mais cinq est aussi un nombre de la suite Fibonacci, ce qui inspira à Kepler la réflexion suivante : ≪ **La capacité d'un arbre à se propager est comme la capacité de cette suite à se propager elle-même.** ≫

Le mode spiralé, où les éléments sont disposés en toutes directions, a longtemps posé problème : il était décrit comme ne présentant pas d'ordre apparent (voir figure 2, gauche). C'est le naturaliste suisse **Charles Bonnet** qui, en 1754, décrit pour la première fois cet arrangement au moyen d'une spirale tournant autour de la branche, et le long de laquelle les feuilles sont disposées régulièrement, **spirale génératrice** (voir figure 2, droite).

Les botanistes allemands **Karl Friedrich Schimper** et **Alexander Braun** remarquent en 1830 que la phyllotaxie spiralée est associée à l'angle d'or et à la suite de Fibonacci :
En observant les deux familles de parastiches sur des pommes de pin, ils remarquent que les nombres de spirales dans chacune de ces familles sont deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci



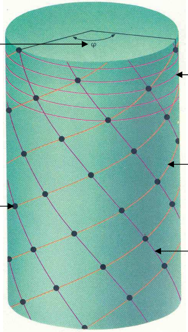
En 1838, les frères **Bravais** proposent de représenter l'agencement des éléments botaniques le long d'une tige à l'aide de réseaux cylindriques : c'est un grand pas dans la modélisation mathématique

La phyllotaxie spiralée:

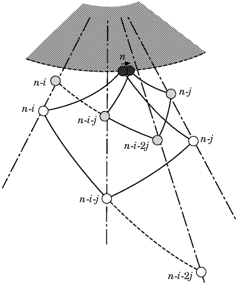
Les éléments botaniques forment une spirale les reliant par ordre de leur apparition: *l'hélice génératrice.*

Les éléments botaniques forment deux familles de spirales reliant un élément à ses plus proches voisins: *les parastiches.*

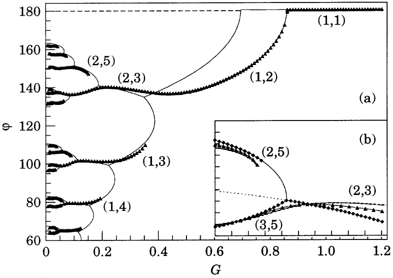
Deux éléments successifs forment entre eux un angle constant: *l'angle de divergence.*



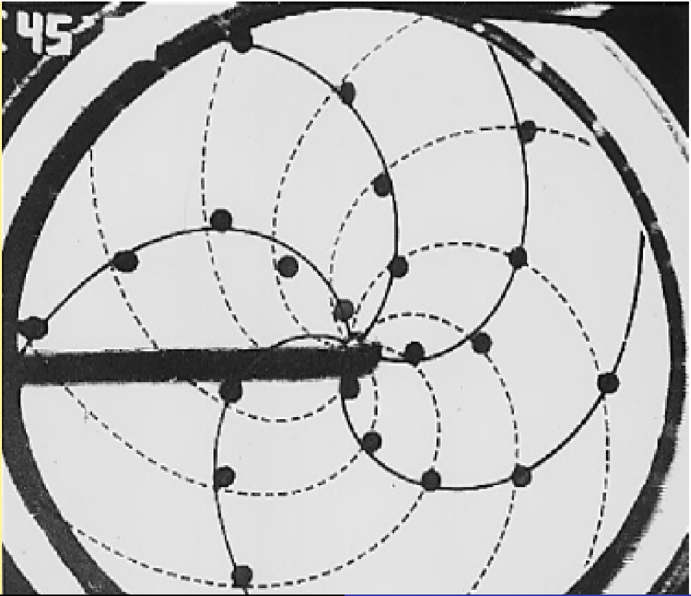
- En 1868, le botaniste **Hofmeister** pense que les nouveaux embryons de feuille se placent dans le plus grand espace disponible.
- Le botaniste **Gerrit van Iterson** produit un travail fantastique en 1907 sur sur les propriétés mathématiques des réseaux : il explique dans le cadre de ce modèle l'apparition des nombres de Fibonacci, de l'angle d'or, et explique même les déformations observées de la géométrie lors de la croissance des plantes. Il introduit un arbre ∞ qui représente ces bifurcations
- En 1996, les physiciens **Douady et Couder** proposent une expérience fondamentale basée sur d'hypothétiques forces de répulsion.



Changement de parastiches.



Les régimes stationnaires possibles.


45