Mathématiques et Horlogerie

Ilan Vardi, EPFL SAMLAB.

3 octobre 2012

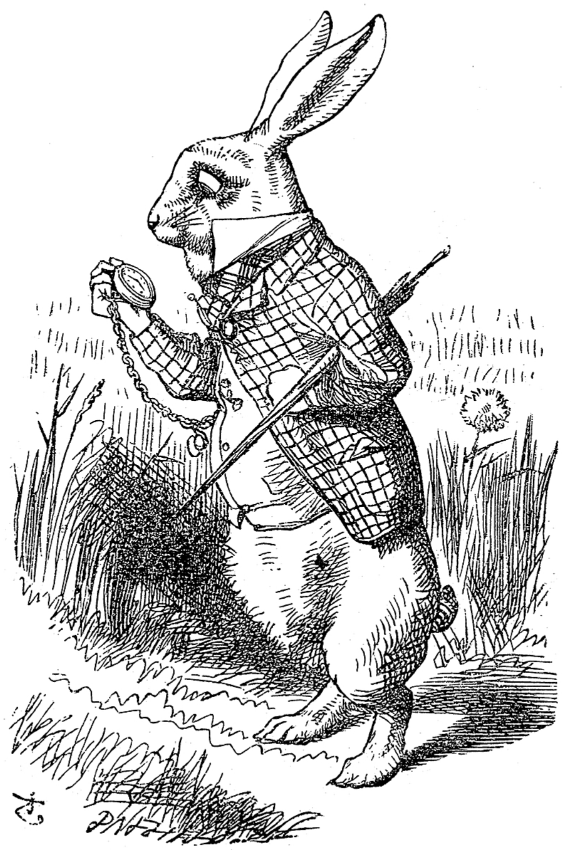


FIGURE 1 – Lire l'heure, un jeu d'enfant ?

Est–ce qu'il y a encore des choses à découvrir en horlogerie mécanique ?

L'algorithme pour lire l'heure d'une montre analogique.

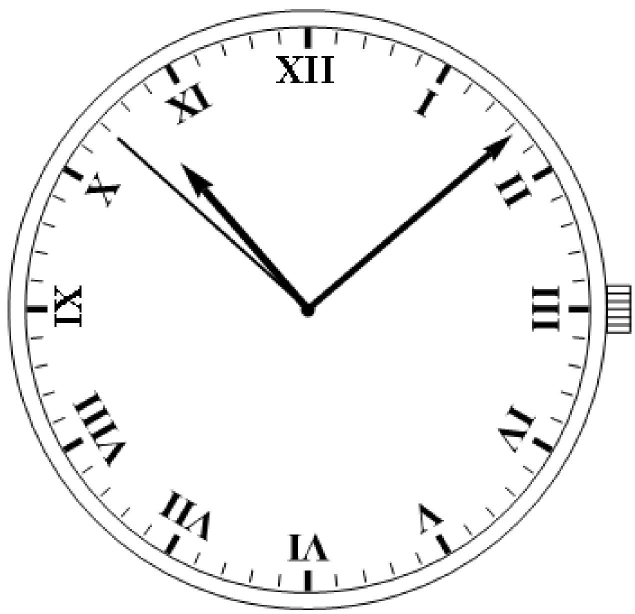


FIGURE 2 – Quelle heure est–il ?

Lire l'heure avec aiguilles :

Secondes = 52, Minutes = $08\,\frac{15}{60}$, Heures = $10\,\frac{38}{60}$.

Lire l'heure sans l'aiguille des secondes

Minutes = $08\,\frac{15}{60}$, Heures = $10\,\frac{38}{60}$.

C'est quoi les maths ?

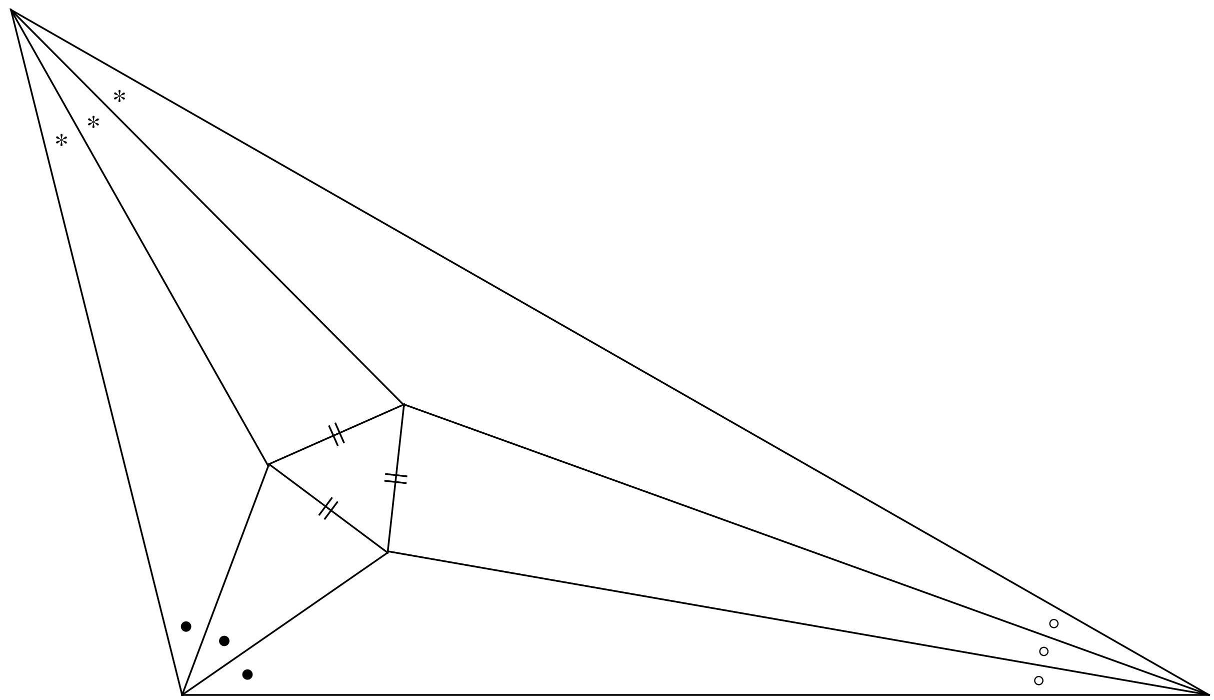


Figure 3 – Théorème de Morley (1899)

Recherche de compréhension la plus complète possible.

- Un véritable résultat mathématique nécessite une preuve.
- Concentration sur des problèmes biens définis.
- Etude d'objets très simples et trouver des résultats profonds.

L'horlogerie nécessite la même précision, il faut tout comprendre pour faire marcher une montre.

Mathématiciens et horlogers peuvent dialoguer.

Les mathématiques ont mené la révolution horlogère du 17ème siècle.

Comment fonctionnent les montres et horloges ?

Un ressort se déroule, ralenti par un régulateur.

FIGURE 4 – Affichage ⇐ Energie ⇒ Transmission ⇒ Echappement ⇒ Régulateur.

Jusqu'au 17ème siècle, le régulateur est un *foliot,* accéléré par le ressort.

Aiguilles affichage du couple du ressort. Erreur 15 minutes/jour.

La révolution : un oscillateur ayant son propre temps.

Equation d'oscillateur $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -Cx.$

Force de rappel est proportionnelle au déplacement.

Exemples : pendule (gravité), lame ressort (élasticité).

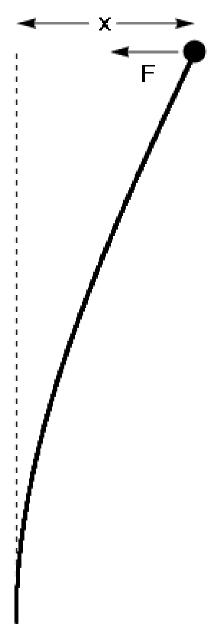


FIGURE 5 – Lame ressort (montre à quartz électronique).

Solution $x(t) = A \sin(2\pi f t + \varphi)$.

Fréquence $f = \dfrac{\sqrt{C}}{2\pi}$ est indépendante de l'amplitude A.

L'*isochronisme :* mesure du temps libérée du moteur.

Précision $\Rightarrow$ 15 secondes/jour.

Conquête du temps : erreur du Soleil = 30 secondes/jour.
Introduction du temps civil.

Nécessité d'une théorie du temps : l'équation de l'oscillateur et les mathématiques donnant sa solution.

Le mathématicien horloger.

FIGURE 6 – Christiaan Huygens (1629–1695).

Galilée a découvert l'isochronisme du pendule en 1602 et a dessiné une horloge.

25 décembre 1656 : Huygens imagine l'horloge au pendule.

Il se rend compte que le pendule n'est pas isochrone.

Mouvement circulaire : $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{L}\sin\theta$.

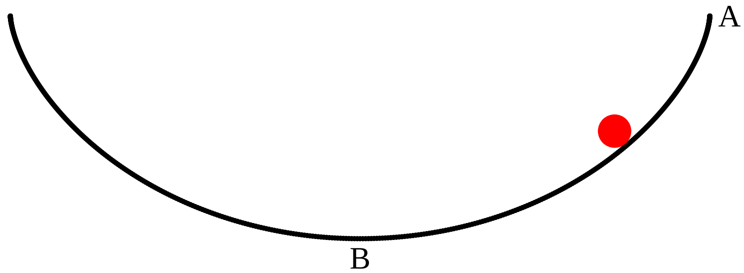
$\sin\theta \approx \theta$ pour $\theta \ll 1$, période $2\pi\sqrt{L/g}$.

Erreur circulaire. Pendule 1 mètre, 2 degrés : variation 0.5 degrés $\Rightarrow$ 3.7s/j.

Inacceptable pour Huygens qui invente le pendule isochrone.

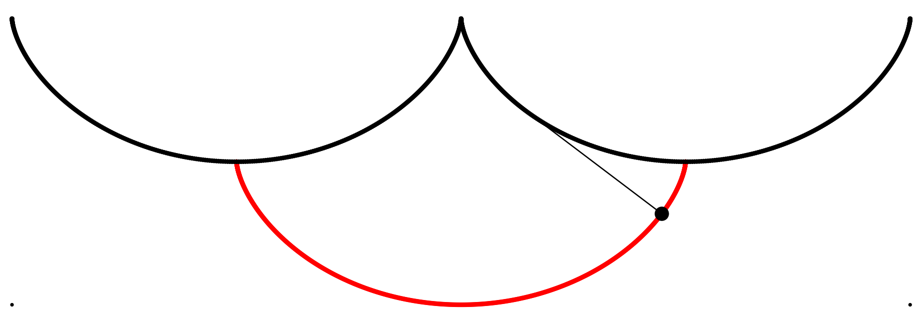
Solution en 3 parties.

1. *Le tautochrone.* Oscillation isochrone d'une bille dans un bol : cycloïde.



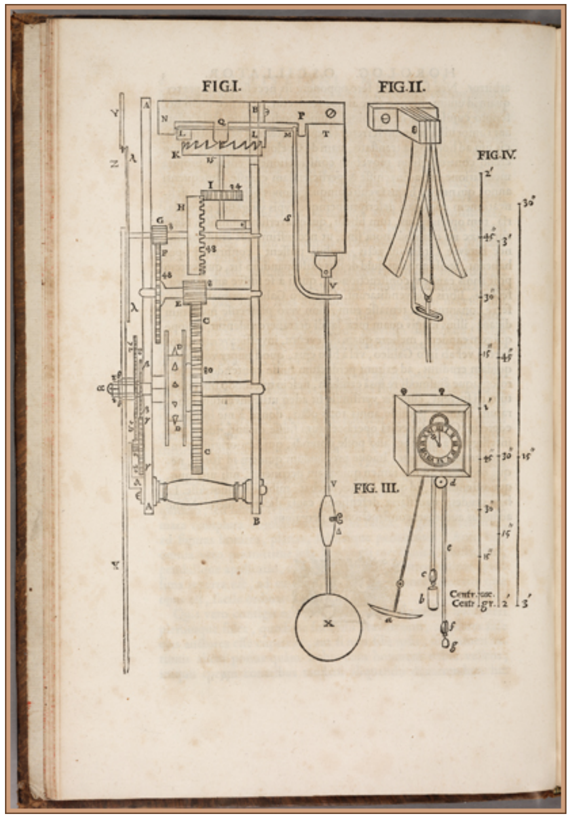
2. Huygens invente la *théorie des développantes.*

3. *La développante d'une cycloïde est une cycloïde.*



On peut forcer une bille à l'extrémité d'un fil souple à parcourir une cycloïde en utilisant des flancs cycloïdaux.

Un pendule souple avec flancs cycloïdaux est isochrone.



Salomon Coster a construit l'horloge en 1657 $\Rightarrow$ précision 10 à 100 supérieure au passé.

1. Une solution complète satisfaisante pour le mathématicien.

2. Facile à démontrer actuellement, mais découvert 30 ans avant le calcul infinitésimal d'Isaac Newton (1687).

3. La théorie des développantes est due à l'horlogerie.

4. Démontre que l'on invente des mathématiques pour résoudre des problèmes, mais que ceci est oublié par la suite.

5. Typique du travail du mathématicien (!) : optimal en théorie, mais pas très bon en pratique. Pendule cycloïdal abandonné en faveur du pendule à petite amplitude.

6. Pas de petite amplitude pour Huygens : il cherchait la longitude en mer.

7. Pendule en mer abandonné à cause des variations de gravité : élever 30 centimètres ou déplacer au sud 100 mètres $\Rightarrow$ retard de 1.5s/an.

8. D'actualité : nouvelle estimation de l'erreur circulaire

   Semjon Adlaj, *An Eloquent Formula for the Perimeter of an Ellipse,* Notices of the American Mathematical Society **59** (2012), 1094–1099.

Comment lire l'heure d'une montre analogique.

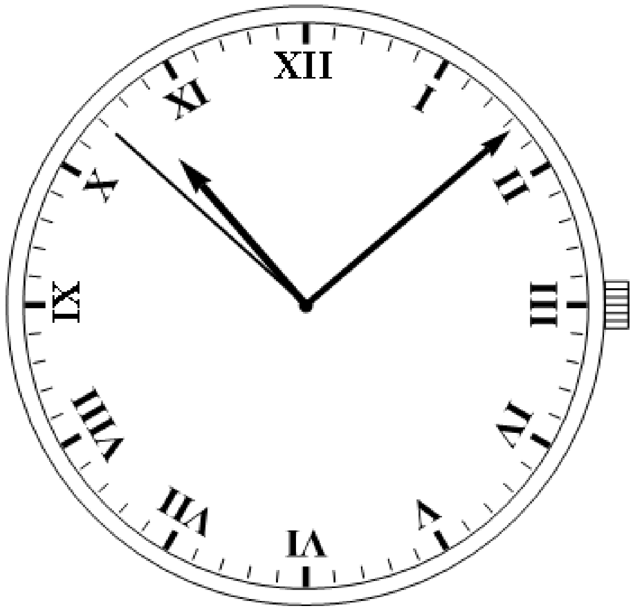


FIGURE 7 – Quelle heure est–il ?

Lire l'heure avec aiguilles :

Secondes = 52, Minutes = $08\,\frac{15}{60}$, Heures = $10\,\frac{38}{60}$.

Lire l'heure sans l'aiguille des secondes

Minutes = $08\,\frac{15}{60}$, Heures = $10\,\frac{38}{60}$.

L'Affichage d'une montre analogique est synchronisé.

La seconde correspond à la minute qui correspond à l'heure.

Oublier la montre et considérer le problème formellement.

Aiguilles : S secondes, M minutes, H heures.

$\{M\} = S/60$, $\{H\} = M/60$,

où $\{x\} =$ partie fractionnaire.

H détermine déjà l'heure ("lire l'heure" !).

Espace de possibilités 1–dimensionnel.

Lecture générale : S secondes, M minutes, H heures.

Un espace 3–dimensionnel.

Priorité des aiguilles : seconde, minute, heure.

Chaque index défini une région qui lui “appartient” (cellule de Voronoï).

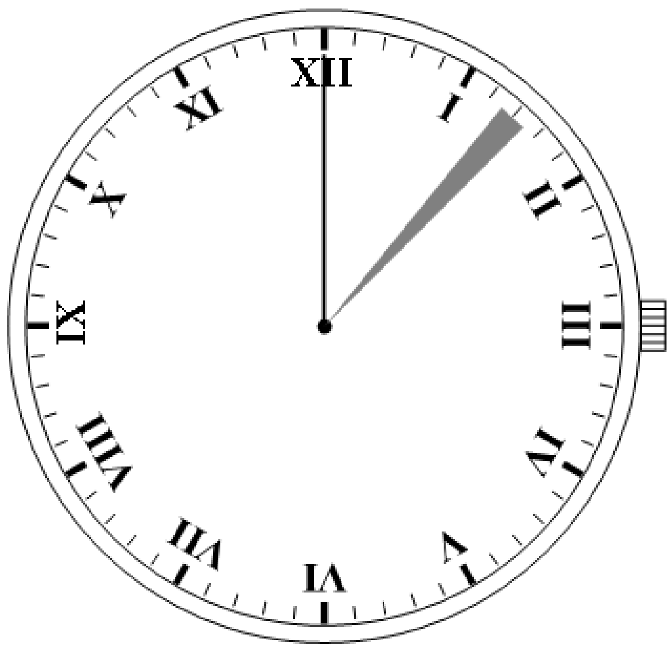


FIGURE 8 – Région “appartenant” à 7m00s

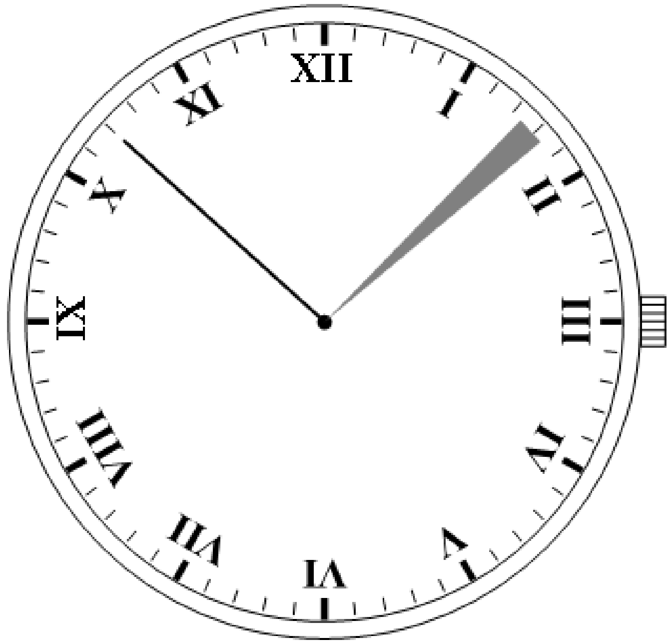


FIGURE 9 – Région “appartenant” à 7m52s

Formulation algébrique :

Entier M' où $M' + \frac{S}{60}$ est le plus proche de M.

$M' = \left[M - \frac{S}{60}\right]$, où $[x]$ = entier plus proche de x.

Heure : entier H' où

$H' + \frac{[M - S/60]}{60} + \frac{S}{3600}$ est le plus proche de H.

$$H' = \left[H - \frac{[M - S/60]}{60} - \frac{S}{3600}\right].$$

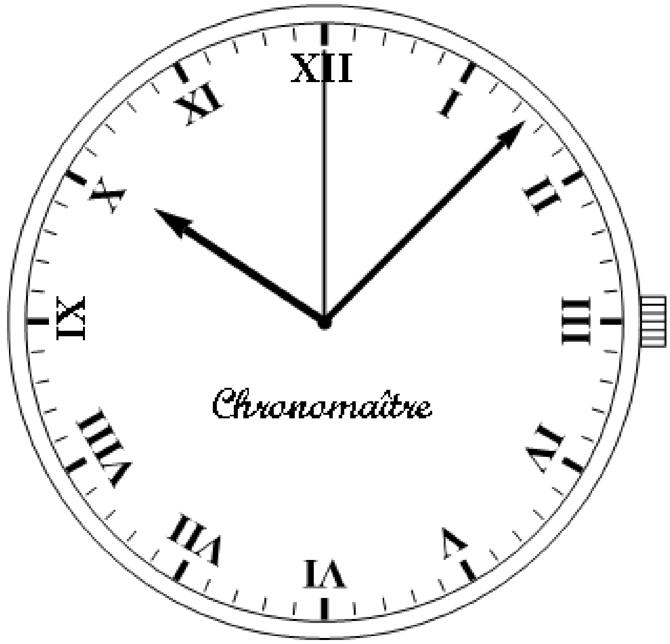


FIGURE 10 – Un affichage ambigu

Lecture ambigüe quand $\left\{M - \dfrac{S}{60}\right\} = \dfrac{1}{2}$ ou

$$\left\{H - \frac{[M - S/60]}{60} - \frac{S}{3600}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Géométrie : frontière de la cellule de Voronoï.

Lire l'heure, aiguilles à S secondes, M minutes, H heures :

S secondes,

$$\left[M - \frac{S}{60}\right] \text{ minutes,}$$

$$\left[H - \frac{[M - S/60]}{60} - \frac{S}{3600}\right] \text{ heures,}$$

Lecture ambigüe $\left\{M - \frac{S}{60}\right\} = \frac{1}{2}$ ou

$$\left\{H - \frac{[M - S/60]}{60} - \frac{S}{3600}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Lire l'heure, M minutes, H heures :

M minutes,

$\left[H - \frac{M}{60}\right]$ heures,

Lecture ambigüe $\left\{H - \frac{M}{60}\right\} = \frac{1}{2}$.

Secondes $= 52$, Minutes $= 08\,\frac{15}{60}$, Heures $= 10\,\frac{38}{60}$.

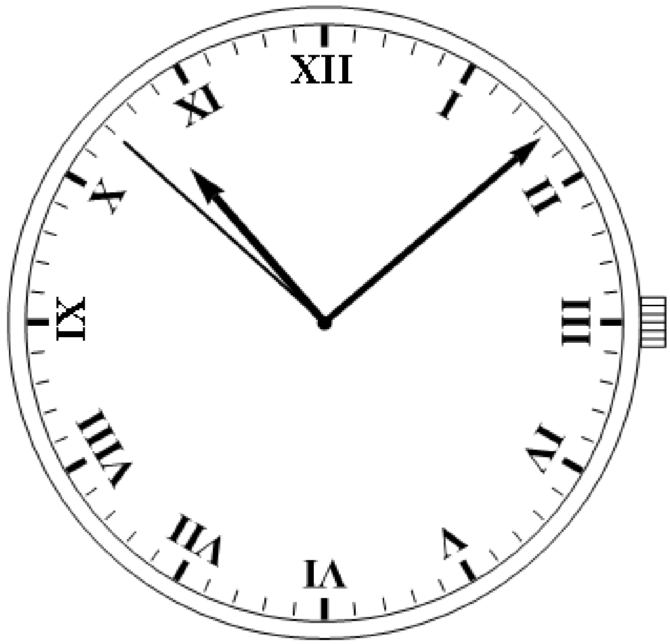


FIGURE 11 – 11:07:52.

$$\text{Minute} = \left[8 + \frac{15}{60} - \frac{52}{60}\right] = \left[8 - \frac{37}{60}\right] = 7\,.$$

$$\text{Heure} = \left[10 + \frac{38}{60} - \frac{7}{60} - \frac{52}{3600}\right] = \left[10 + \frac{31}{60} - \frac{52}{3600}\right]$$

$$= \left[10 + \frac{30}{60} + \frac{60}{3600} - \frac{52}{3600}\right] = 11\,.$$

Sans seconde 10 : 08 : 15.

$$\text{Heure} = \left[10 + \frac{38}{60} - \frac{8 + 15/60}{60}\right] = \left[10 + \frac{30}{60} - \frac{15}{3600}\right] = 10\,.$$

Utiliser des fractions exacte et non pas des nombres flottant simplifie le calcul.

C'est le principe du *calcul formel* maintenant possible par ordinateur.

La solution complète satisfait le mathématicien. Mais en pratique, on va réparer la montre !

L'analyse de la désynchronisation est plus utile.

Presque toutes les montres sont désynchronisées.

Cause principale : cadran excentré.

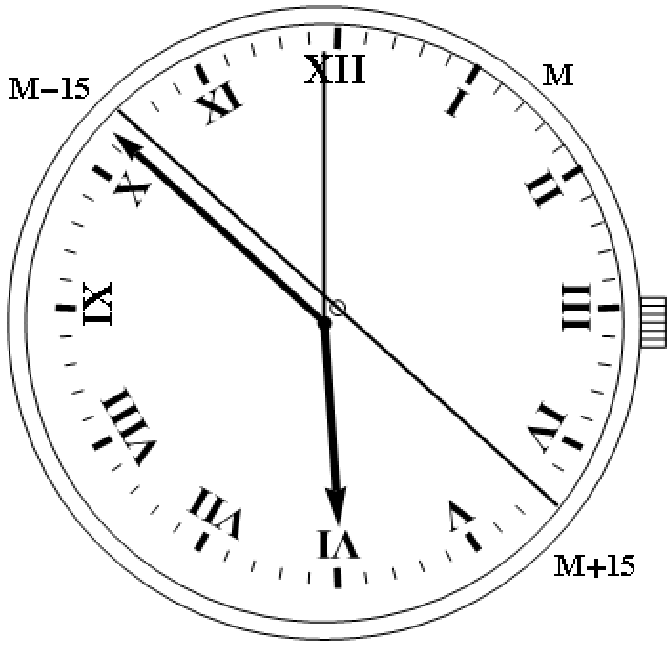


FIGURE 12 – Retard maximal à $M - 15$

Formule explicite du décalage : $\varepsilon \sin\left(2\pi\frac{m-M}{60}\right)$,

cadran décalé distance ε direction la minute M.

Observation du décalage à chaque minute

$\Rightarrow$

estimation d'excentricité au $1/100$ mm.

Nouveau test non–invasif de la montre.

Cause principale : mauvais réglage de l'utilisateur.

Nécessite l'affichage le plus lisible pour bien régler les aiguilles.

Affichage classique "chemin de fer" de chronomètre de marine

Chronomètre No. 549 de Thomas Earnshaw (1800).

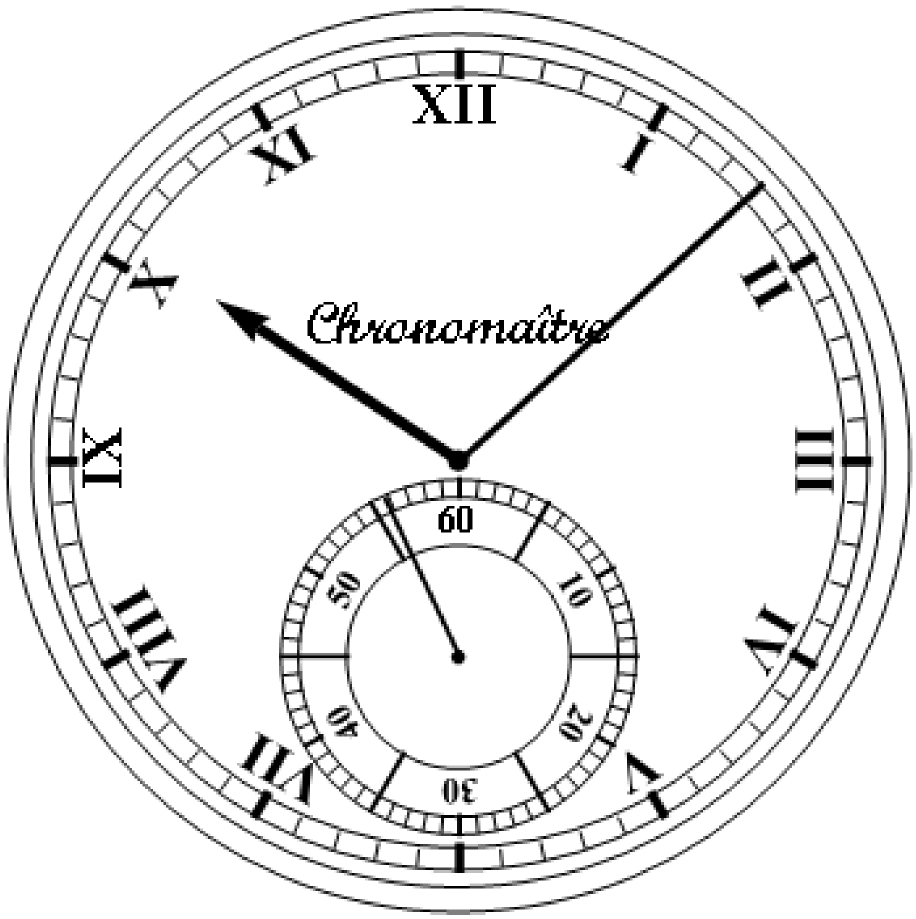


Figure 13 – Affichage chronomètre.

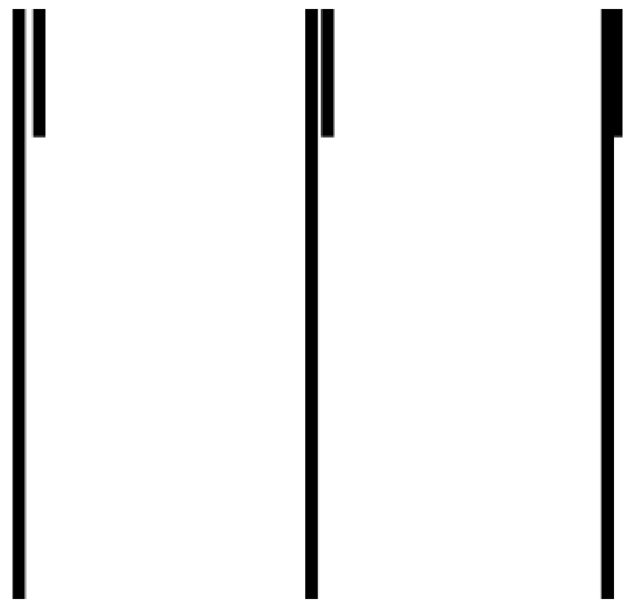


Figure 14 – Passage d'une aiguille sur un index

L'acuité de Vernier est 5 à 10 fois meilleure.

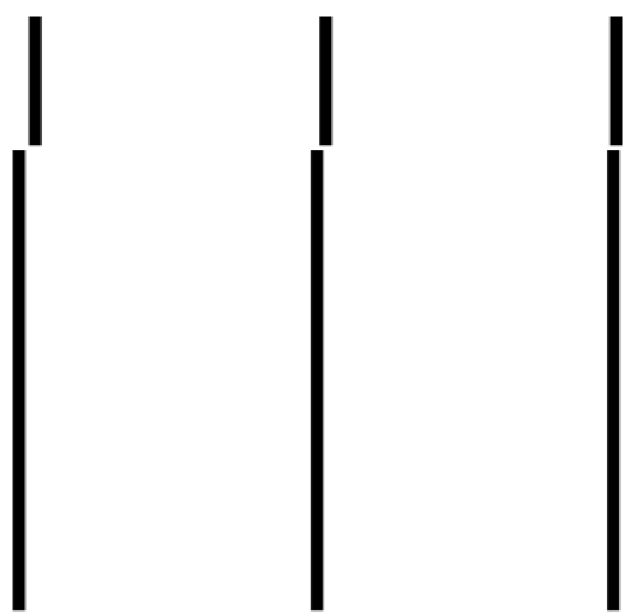


Figure 15 – Passage Vernier d'une aiguille sur un index

Minimiser le parallaxe en posant la minute sous l'heure.

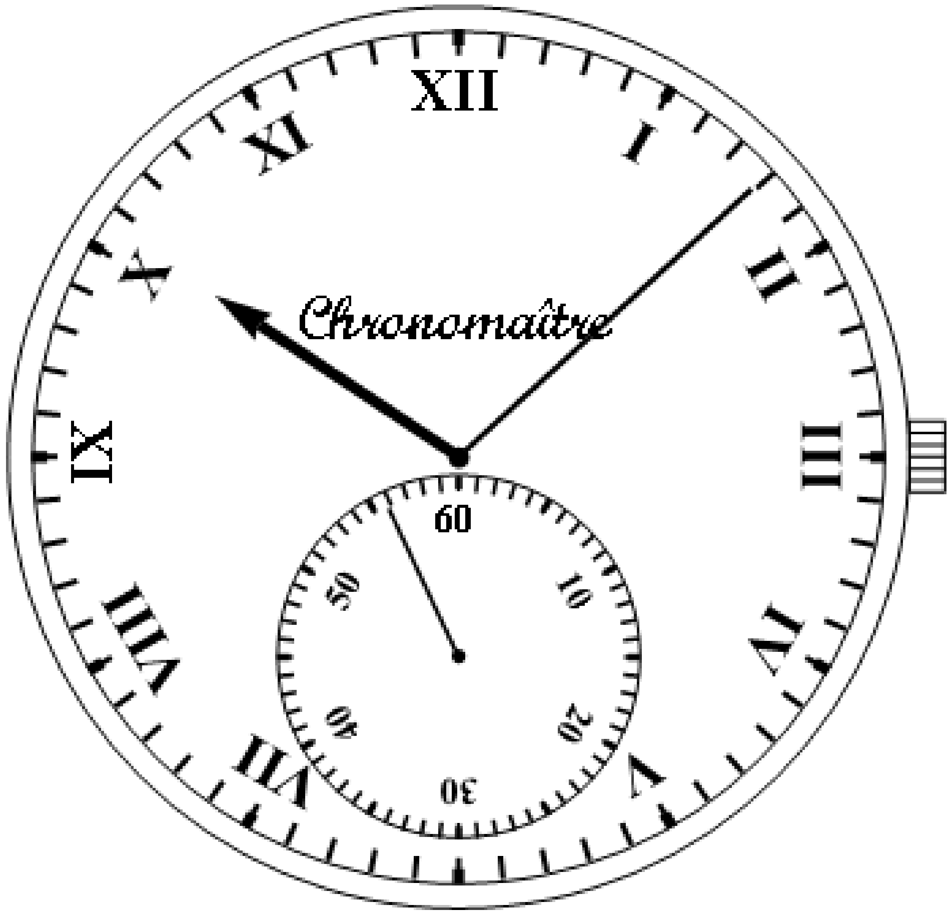


FIGURE 16 – Affichage optimisé

L'heure 10:07:55.8 devient lisible.

Lecture 5 à 10 fois supérieure à l'affichage classique.