Comment utilise-t-on les travaux d'Euler aujourd'hui ?

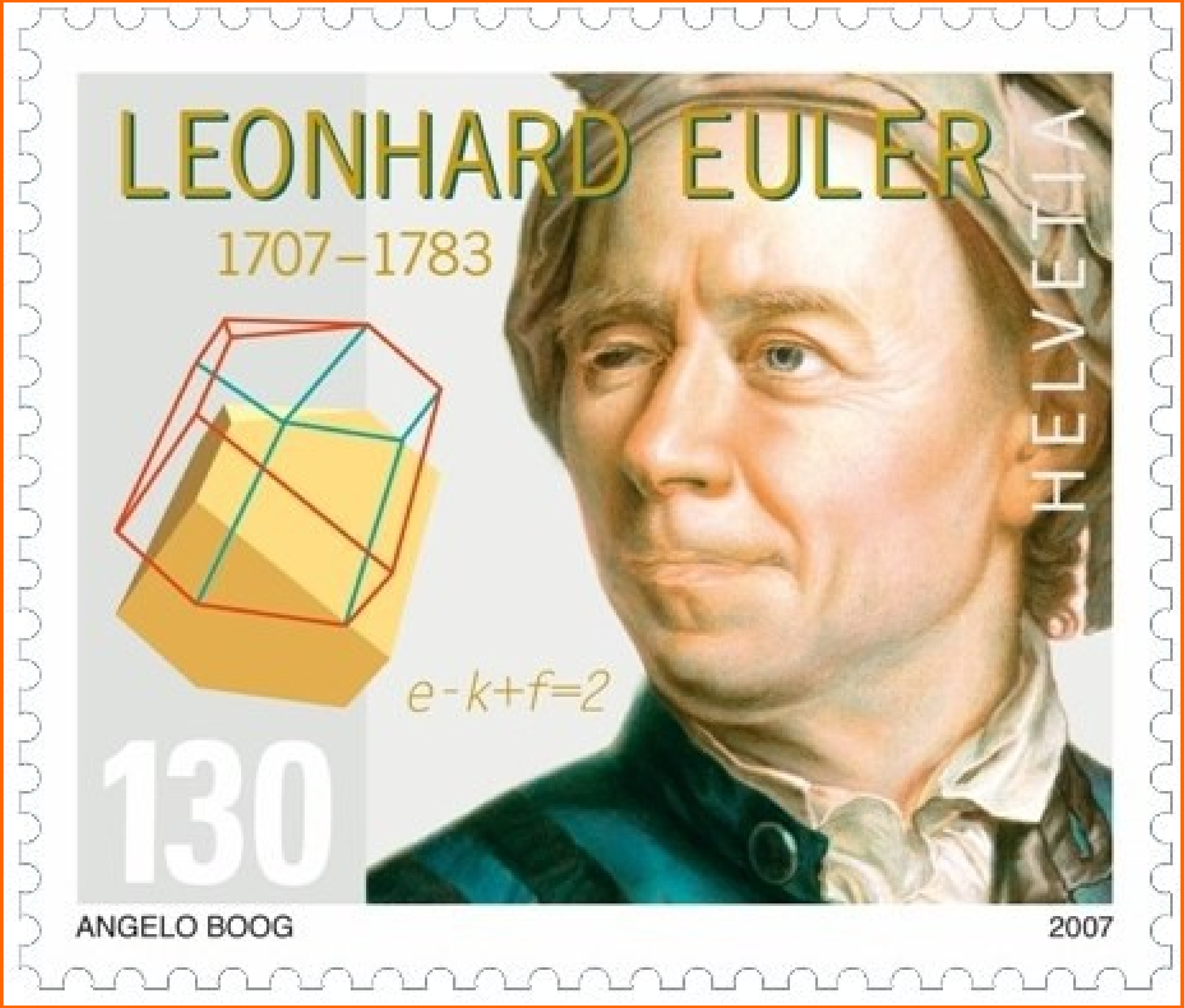
Mireille Schumacher
Dr. es sciences

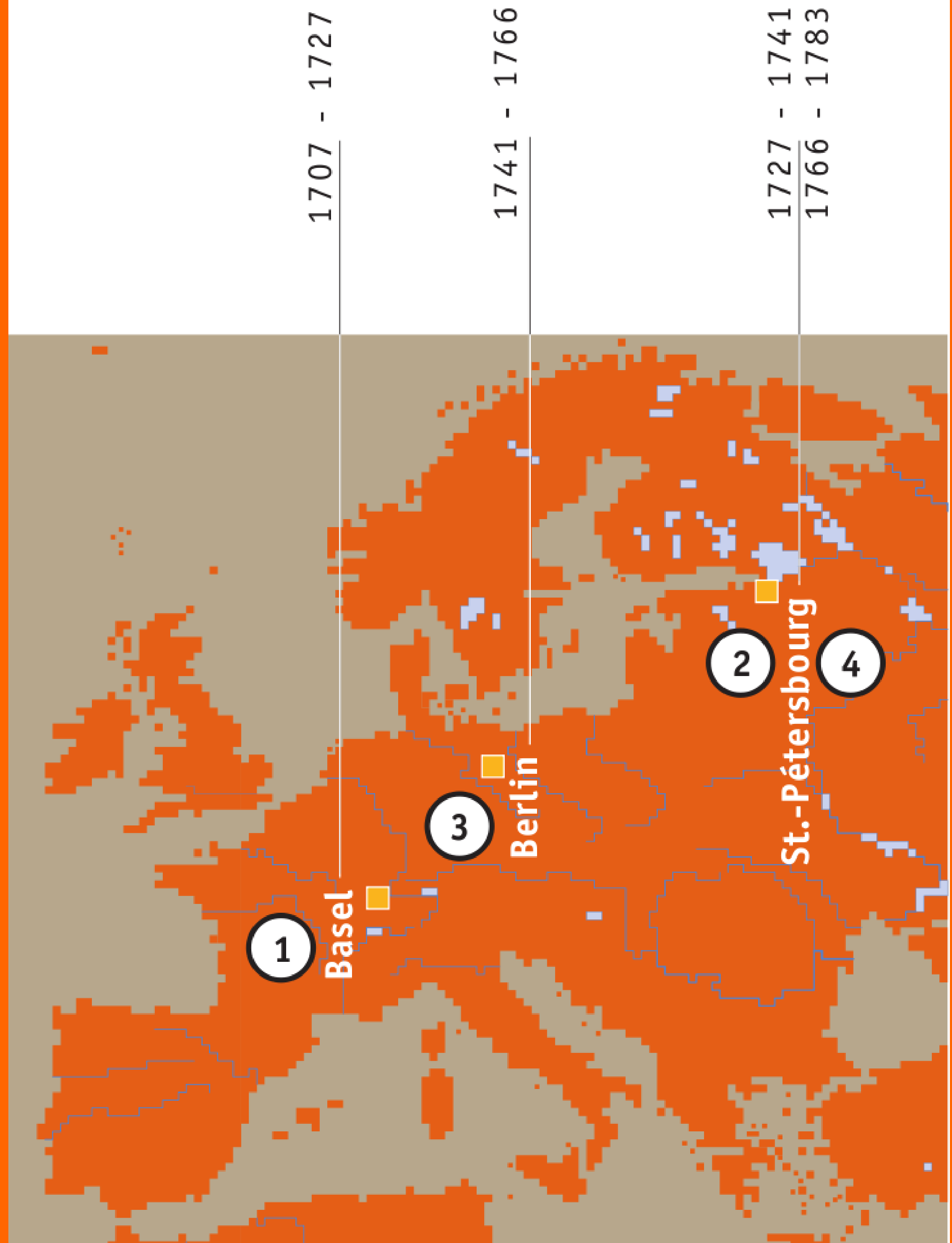
mireille.schumacher@gmail.com

Séminaire mathématiques et société
Institut de Mathématiques de l'Université de Neuchâtel 9 avril 2014

Sommaire

L'oeuvre complète de Leonhard Euler


LEONHARD EULER
1707–1783
e-k+f=2
HELVETIA
130
ANGELO BOOG
2007



Les lieux de vie de Leonhard Euler, 1707-1783

Leonhardi Euleri opera omnia

L’œuvre complète de Leonhard Euler est articulée en :

- trois séries
- comptant 72 volumes
- recensant les 865 écrits du savant
- numérotés selon l’Index d’Eneström lettre E suivie du numéro de l’article

- Première série

  29 volumes tous parus

  Mathematiques pures

- Deuxième série

  31 volumes dont 29 parus et 2 en préparation

  Mécanique et astronomie

- Troisième série

  12 volumes tous parus

  Physique, Théologie et

  Lettres à une princesse d’Allemagne

Quatrième série A *Correspondance d'Euler avec ses contemporains*

4 volumes parus – 5 volumes en préparation

Quatrième série B *Manuscrits d'Euler*

Parution planifiée

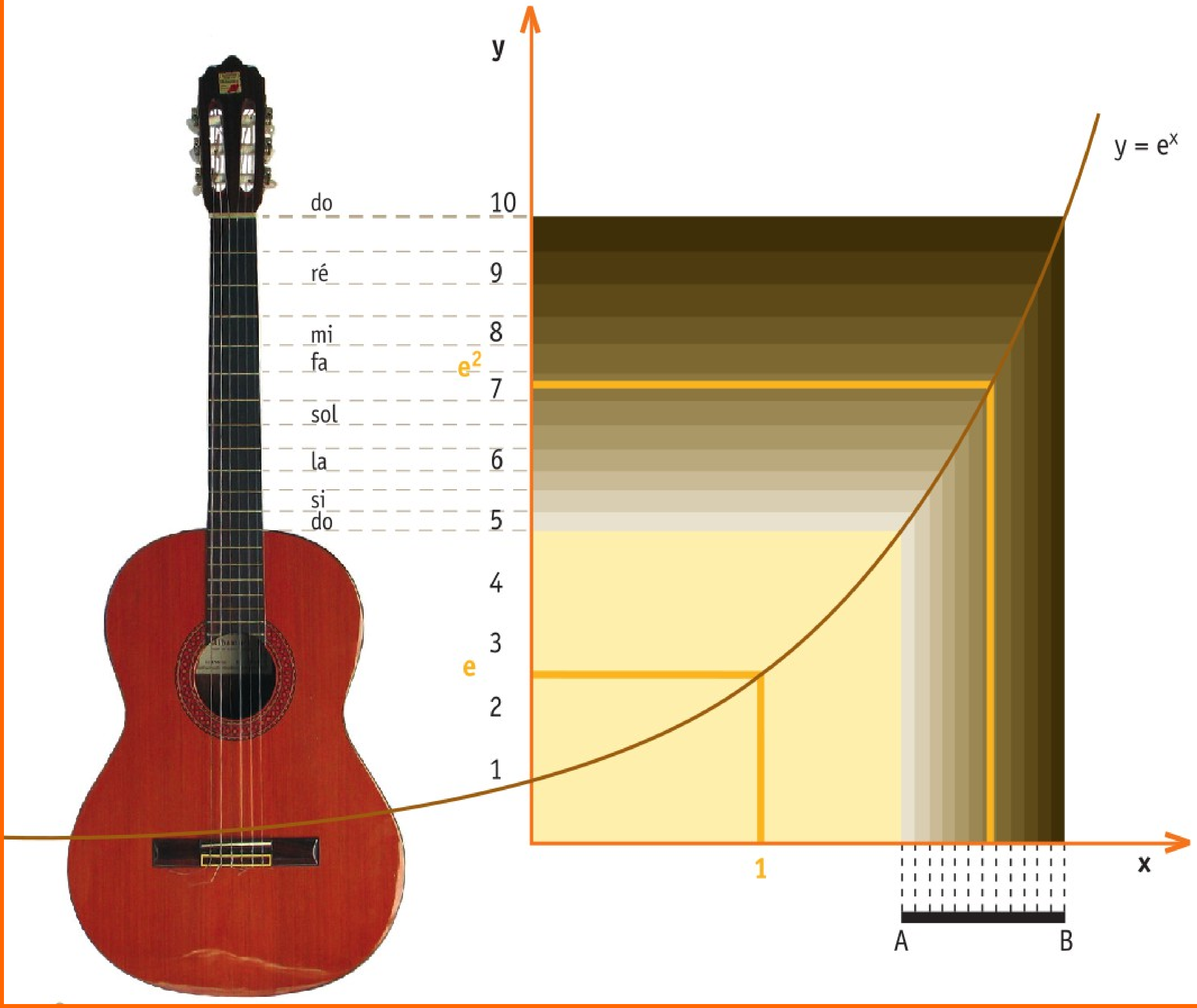
Des notations qui nous sont familières

De nombreuses notations mathématiques ont été introduites par Euler :

$f(x)$ pour les fonctions, e base des logarithmes naturels, i tel que $i^2 = -1$, Σ le symbole de sommation, $\int_a^b$ pour les intégrales définies, π pour la circonférence du cercle de diamètre 1 (notation popularisée par Euler mais due au mathématicien anglais, William Jones).

Nombres complexes

Euler contribua à l'usage des nombres complexes. Il établit l'identité $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$ et en déduisit l'une des relations les plus célèbres des mathématiques $e^{i\pi} + 1 = 0$ extraordinaire formule qui fait intervenir tous les nombres essentiels.


y
y = e^x
do
ré
mi
fa
sol
la
si
do
10
9
8
e^2
7
6
5
4
3
e
2
1
1
x
A
B

Construction des frettes d'une guitare:

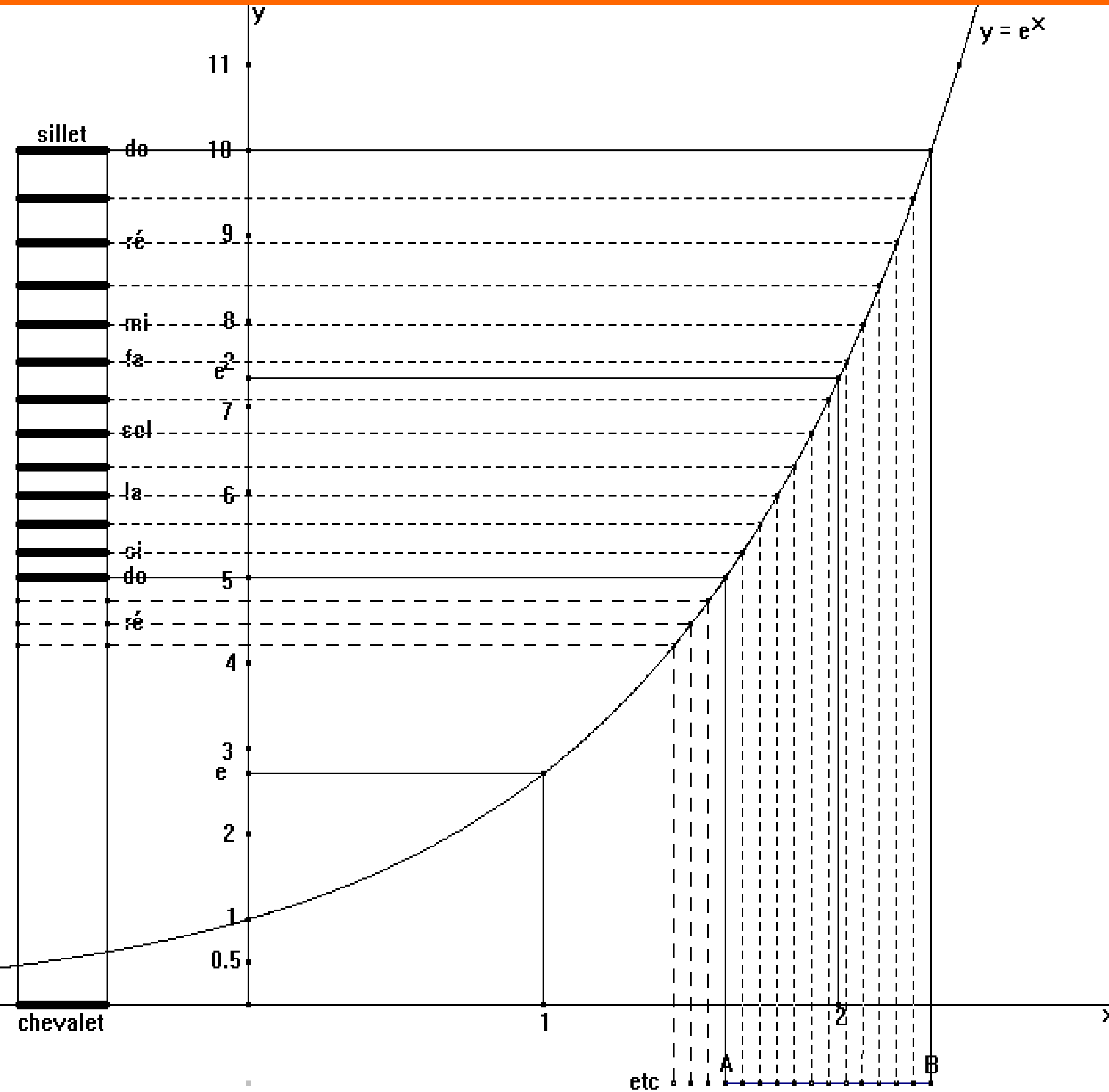
1. On dessine la fonction $y = e^x$.

2. On choisit sur Oy deux points d'ordonnées y et 2y (dans l'exemple ci-contre, 5 et 10).

3. On les "ramène" sur une parallèle à Ox (AB).

4. On divise AB en 12 parties égales.

5. On "ramène les divisions sur le manche de la guitare parallèle à Oy.



L'indicatrice d'Euler et le système de sécurité des transactions sur internet

Indicatrice d'Euler et théorème d'Euler-Fermat

La fonction indicatrice d'Euler est la fonction **φ** qui à un entier naturel non nul n associe le nombre **φ**(**n**) des entiers inférieurs à n et premiers avec n

Exemples

- Pour n=20 ; 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17 et 19 sont premiers avec 20, donc $\varphi(20) = 8$
- Si n est un nombre premier, alors $\varphi(n) = n-1$

Euler établit une formule reliant $\varphi(n)$ et ses facteurs premiers notés p, q, …

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\cdots$$

- Ainsi $\varphi(20) = \varphi(2^2 \cdot 5) = 20 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 8$

- **Théorème de Fermat** (1640)
  Pour tout nombre a et tout nombre premier p,
  p ne divisant pas a, on a p divise $a^{p-1} - 1$ ou
  $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ou $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Exemple : choisissons a=4 et p=5

$a^{p-1} - 1 = 4^{5-1} - 1 = 4^4 - 1 = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255 = 51 \cdot 5$

- Euler démontre le théorème de Fermat en 1736 et le généralise en 1758

- **Théorème d'Euler-Fermat** (1758)
  Si a est premier avec n, alors n divise $a^{\varphi(n)} - 1$ ou
  $a^{\varphi(n)} - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ ou $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

Exemple : si a=3 et n=20, alors $3^{\varphi(20)} - 1 = 3^8 - 1 =$
$6561 - 1 = 6560 = 328 \cdot 20$ est divisible par 20

Le système RSA de cryptographie à clé publique est basé sur le théorème d'Euler-Fermat

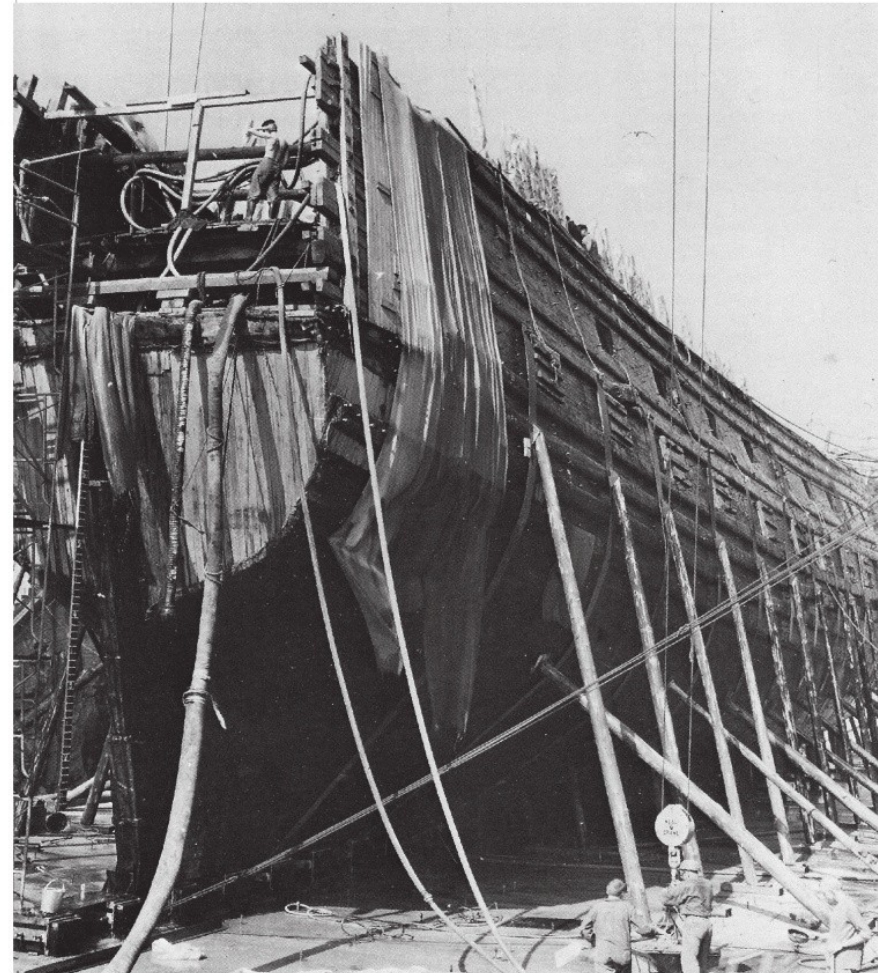
Le protocole RSA (nommé par les initiales de ses inventeurs), Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonhard Adleman en 1977 utilise une paire de clés composée d’une clé publique – connue de tous – pour chiffrer et d’une clé privée – tenue secrète – pour déchiffrer des données confidentielles

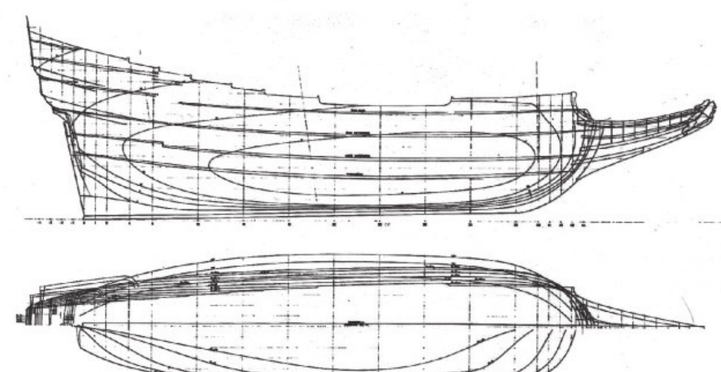
Euler et la navigation

1626-1628
Construction du VASA
navire de guerre suédois

10 août 1628
Naufrage du VASA
lors de sa première sortie

1961
Renflouement du VASA
il se trouve aujourd'hui à
Stockholm au musée VASA





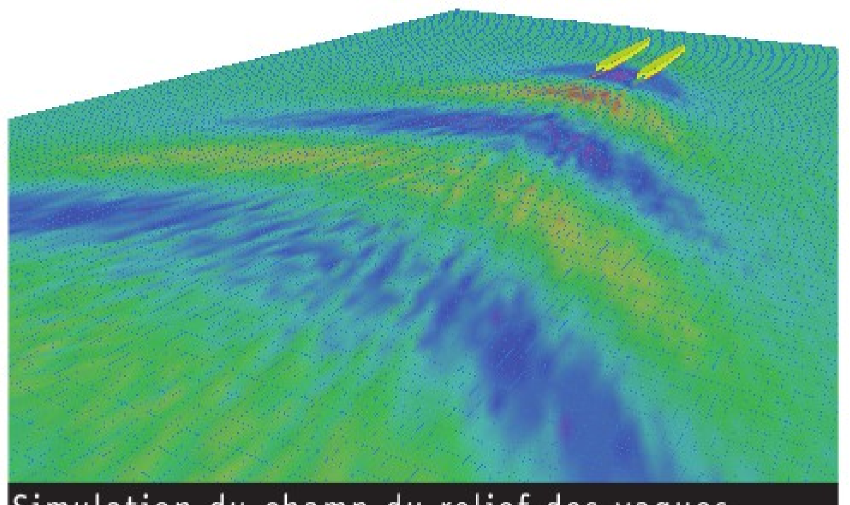
Comment un bateau peut-il tenir la mer ?

Apports très concrets de Leonard Euler à des problèmes de son temps dans les domaines suivants

- **Hydrostatique** = étude du navire immobile
  flottabilité et stabilité en développant le concept de ***métacentre***

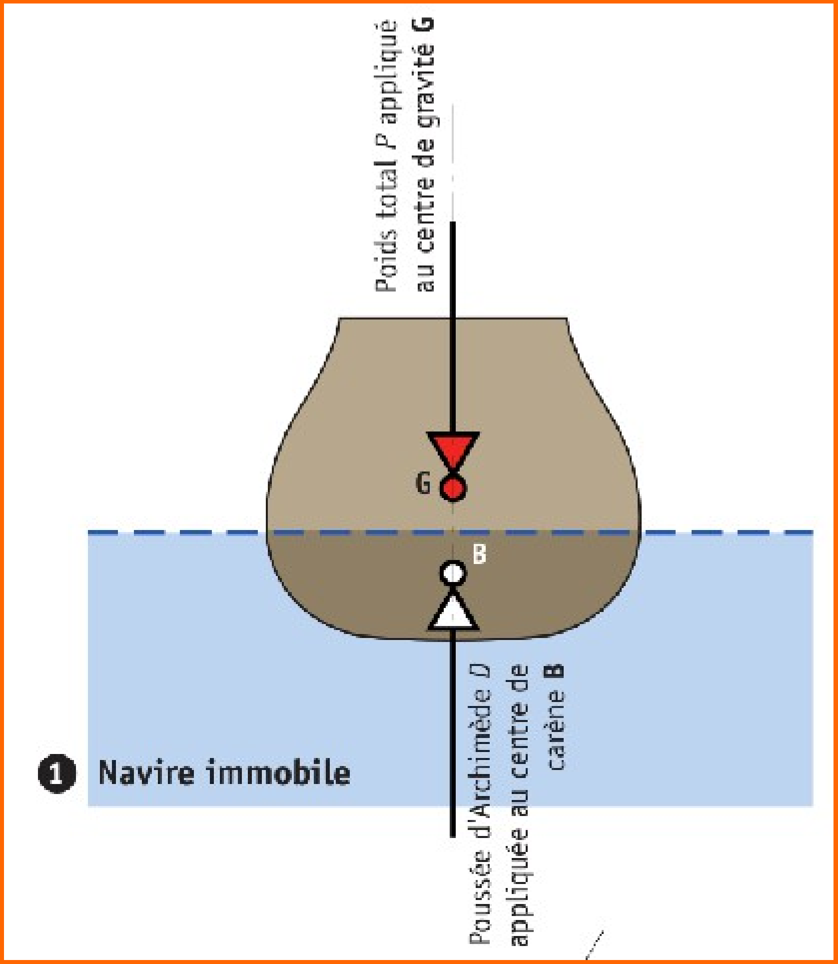
- **Hydrodynamique** = étude du navire en mouvement
  propulsion, manoeuvrabilité

- **Computational fluid dynamics**
  Les conquêtes de l'industrie informatique ont été nécessaires à la réalisation des calculs qu'Euler avait exposés



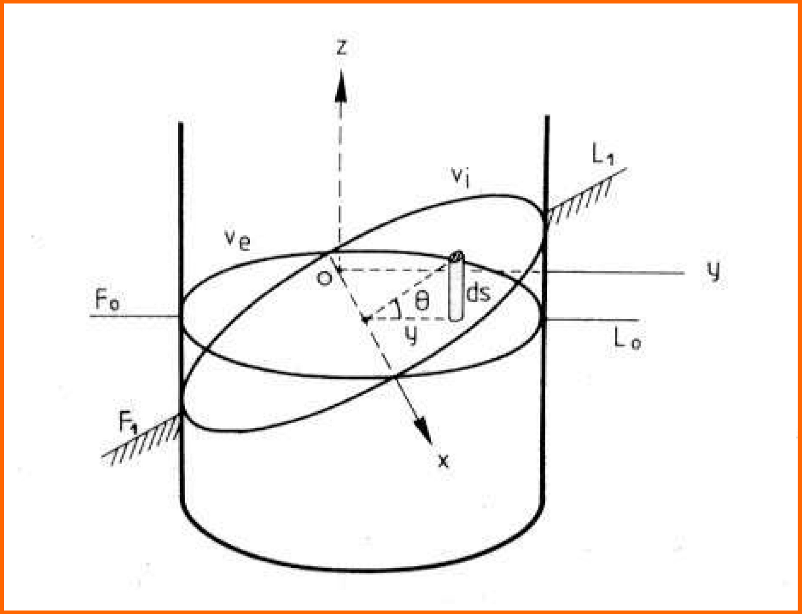
Simulation du champ du relief des vagues

Schéma 1 : Le point **B** est le centre de carène (volume immergé du navire).
G est le centre de gravité du navire



Théorème d'Euler 1749

La droite d'intersection de deux surfaces de flottaison isocarènes infiniment voisines passe par leur centre commun (F)



Ce théorème est très utile car il permet de quantifier la stabilité du navire sans avoir recours à des logiciels

Stabilité transversale

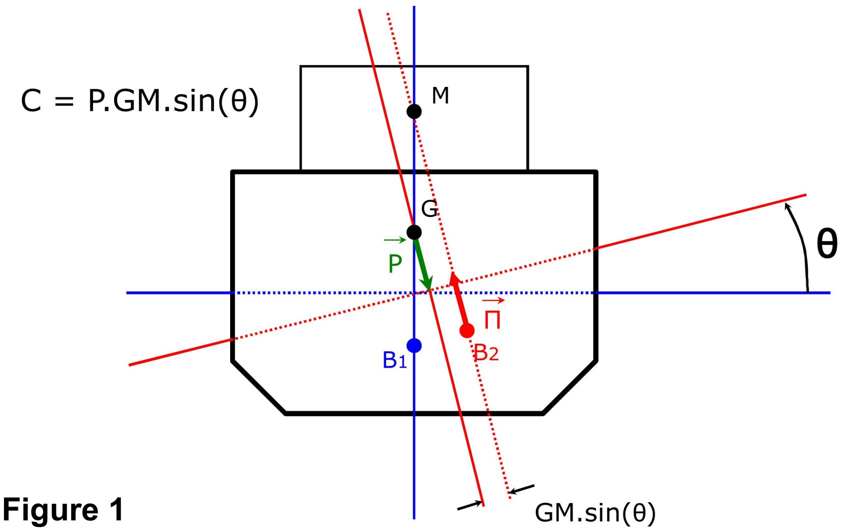
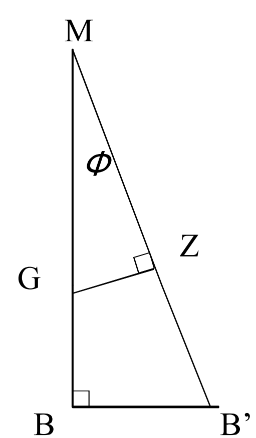


Figure 1

Fig.1 et 2 © F.Grinneart&J-M.Laurens

Couple de redressement

Φ tend vers 0



$GZ = GM . \sin\Phi$

$C = GZ . \Delta$

Figure 2

Figure 1

Navire à l'équilibre vertical : **B_1** et **G** sont alignés sur la même verticale

On fait subir une *inclinaison isocarène d'un angle* θ *infiniment petit* au navire. Le centre de carène **B_1** se déplace en **B_2**

La nouvelle verticale terrestre passe par **B_2** et est perpendiculaire à la nouvelle surface de flottaison

B_2 et **G** n'étant plus sur une même verticale terrestre, le navire n'est plus à l'équilibre. Il apparait un couple de redressement dont le module C s'exprime à l'aide de l'angle θ

On définit

Z le projeté orthogonal de G sur la nouvelle verticale terrestre passe par **B_2** ou **B'**

M le point d'intersection des verticales terrestres passant par le centre de carène avant inclinaison et après inclinaison est appelé **métacentre**

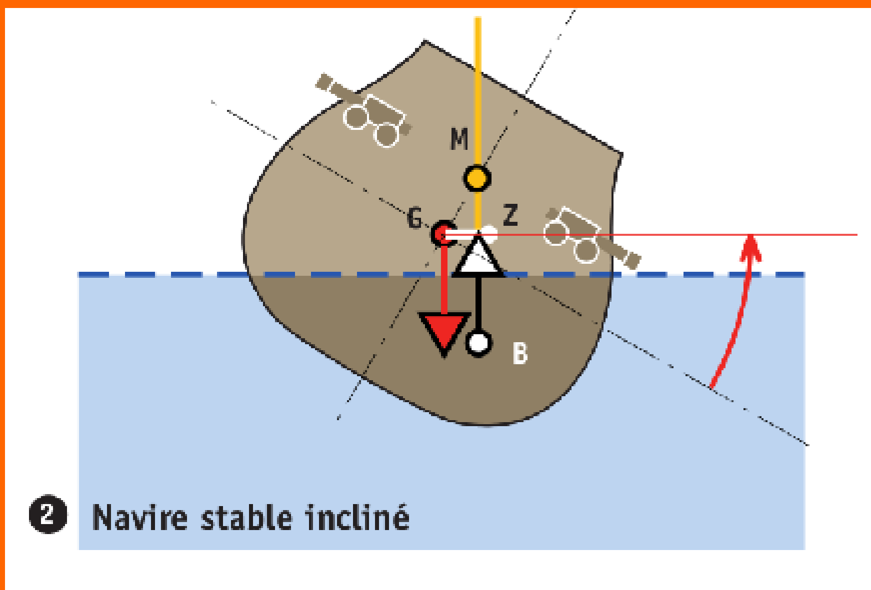
Figure 2

La distance GZ [m] est le bras de levier du couple de redressement C

GM est la hauteur métacentrique

Δ [tonnes] est la masse du volume d'eau déplacé

Schéma 2 : Le métacentre ***M*** est situé au-dessus du centre de gravité. Le ***GZ*** est positif, le ***Z*** étant situé à droite de l'axe de symétrie du navire, lequel est donc en voie de redressement



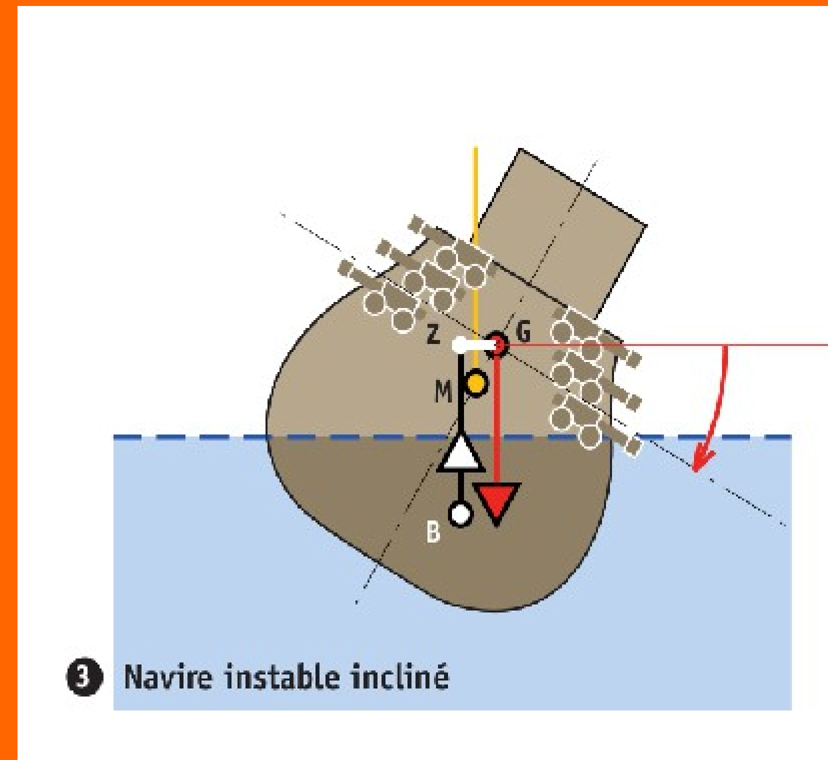
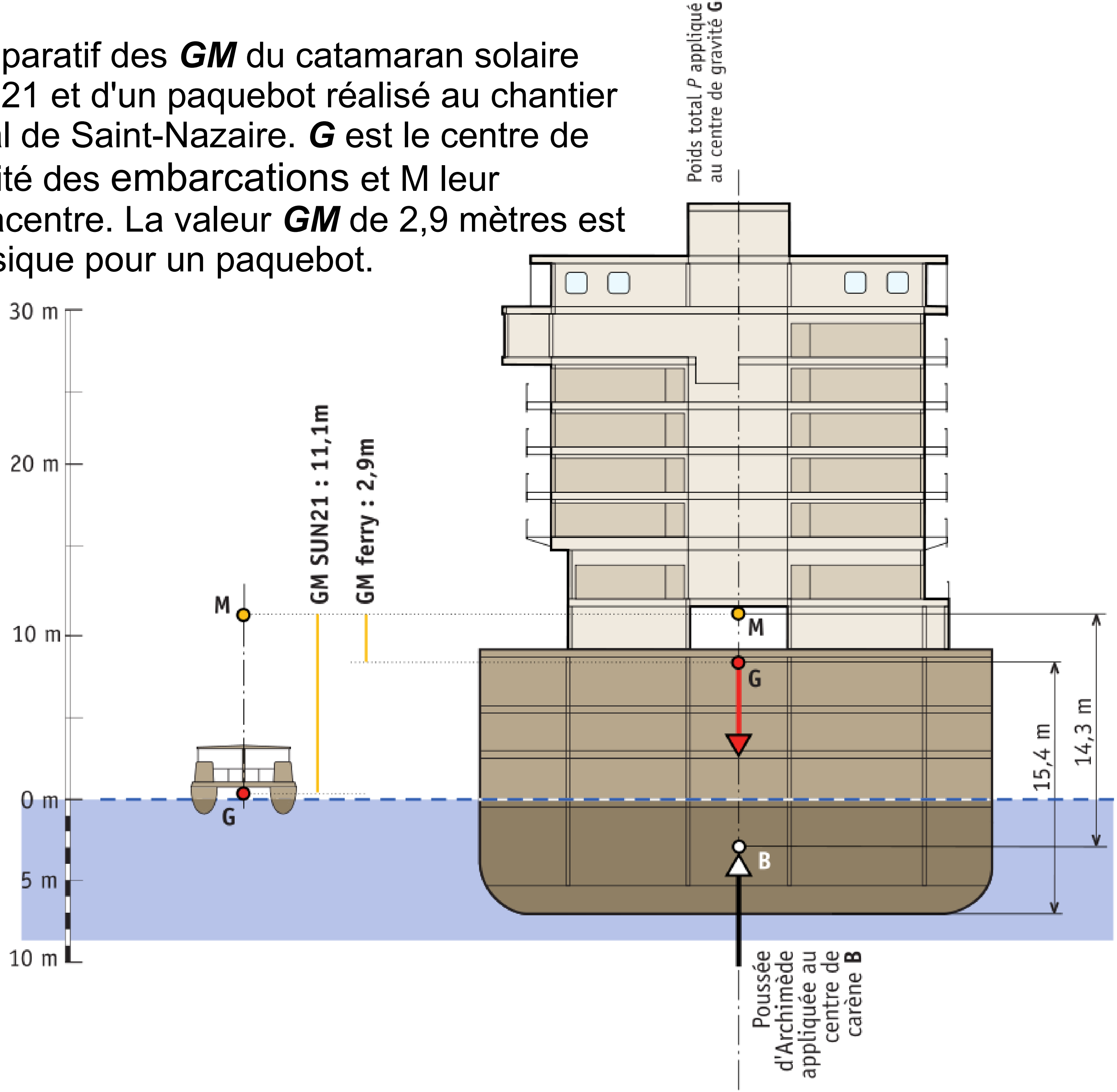


Schéma 3 : Le métacentre ***M*** est situé au-dessous du centre de gravité. Le ***GZ*** est négatif, le ***Z*** étant situé à gauche de l'axe de symétrie du navire. Le navire surchargé est en voie de chavirement

Comparatif des ***GM*** du catamaran solaire SUN21 et d'un paquebot réalisé au chantier naval de Saint-Nazaire. ***G*** est le centre de gravité des embarcations et M leur métacentre. La valeur ***GM*** de 2,9 mètres est classique pour un paquebot.

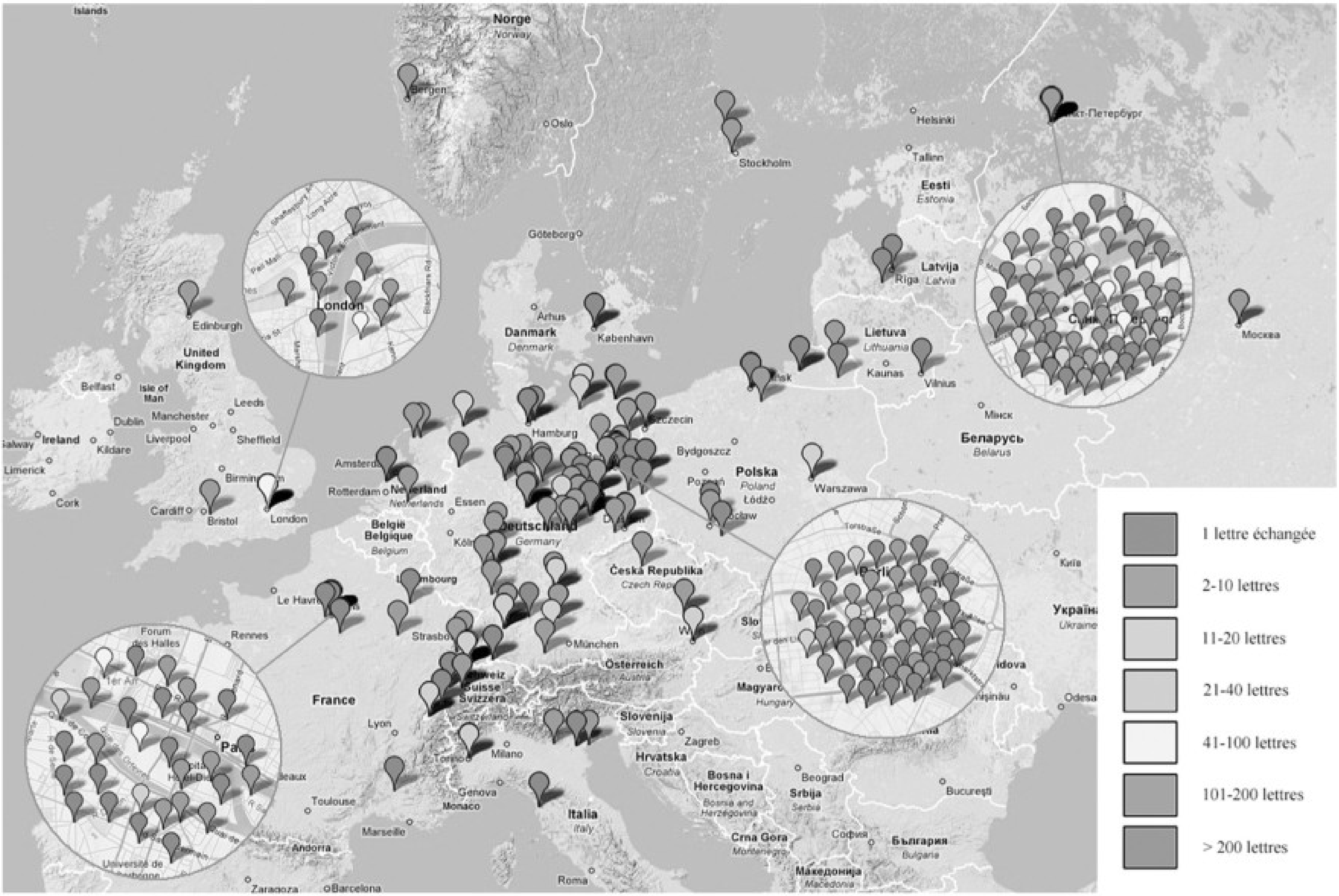


Correspondance d'Euler

- *Leonhard Euler a entretenu un très important réseau de correspondants à travers toute l’Europe des Lumières*

- Le nombre de lettres constituant cette correspondance savante est époustouflant : environ 3200 lettres connues
- Euler en a écrit 1118
- 1/3 en *français*, 1/3 en *latin* et 1/3 en *allemand*

- Paris, Londres, Berlin et Saint-Pétersbourg sont les quatre villes qui possèdent les académies les plus importantes pour le XVIIIe siècle, chacune publiant son propre journal lu à travers l'Europe ; elles sont les centres principaux de cette correspondance



Les pôles du savoir au XVIIIème siècle

Paris, Londres, Berlin, Saint-Pétersbourg

Les correspondants d'Euler, environ 300, sont :

- Des savants européens

  Très peu de correspondants en Angleterre, aucun en Espagne

- Des fonctionnaires des académies

  En particulier Johann Daniel Schumacher, administrateur de l’académie de St-Petersbourg, avec lequel Euler a échangé 307 lettres en allemand

- Des éditeurs et des libraires

Ils abordent des questions de mathématique, d’astronomie, de physique, de chimie, de botanique, de philosophie, de médecine, de géographie, de cartographie et des sujets administratifs

Correspondance Euler - Cramer

Gabriel Cramer

1704 - 1752

- Nommé à l'âge de 20 ans à la chaire de mathématique de l'Académie de Genève
- Fondateur avec Leibniz de la théorie des déterminants, Gabriel Cramer a donné son nom à une « *Règle* » et à un « *Paradoxe* »
- Il a calculé orbites et aphélies des planètes
- Ses œuvres sont nombreuses et variées. La plus connue est son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (1750)
- Il édite des travaux pour les frères Bernoulli et pour Euler
- Sa correspondance scientifique est considérable

- Ces échanges épistolaires illustrent les méthodes de travail, jour après jour, entre deux éminents savants et nous offre un tour d'horizon des problèmes qui occupent la science à cette époque. Les grands sujets qu'Euler et Cramer traitent dans leur correspondance ont intéressé leurs célèbres prédécesseurs : Descartes, Leibniz et Newton
- Analyse des courbes algébriques : nombre de points déterminant une courbe, nombre de points d'intersection de 2 lignes courbes, maxima, minima, points de rebroussement de seconde espèce
- Optique
- Lois des corps en mouvement

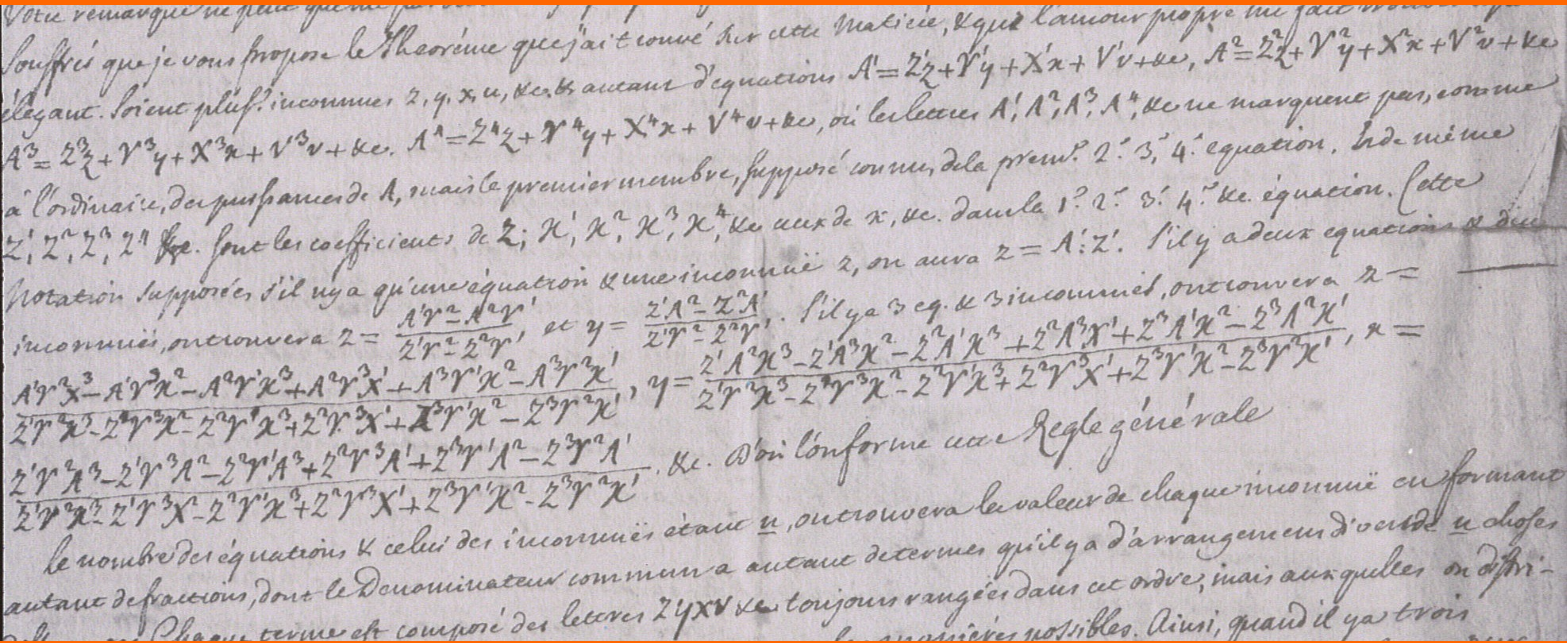
Lettre no.6 du 11 novembre 1744 de Gabriel Cramer à Leonhard Euler [R 462]

$$y=\sqrt{ax}\pm\sqrt[4]{ax\left(x-b\right)^{2}}$$

Extrait de la Lettre 6 du 11 novembre 1744 de G. Cramer à L. Euler

« Je viens à la description des lignes algebriques par un nombre de points donnez, ou, ce qui revient au même, à la recherche de plusieurs indeterminées par le moien d'autant d'équations, où ces indeterminées ne montent qu'au premier degré. Votre remarque ne peut que me paroitre très juste, puisqu'elle s'acorde entierement à ce que j'avois pensé sur ce sujet. Souffrés que je vous propose le Theorème que j'ai trouvé sur cette matière, et que l'amour propre me fait trouver assés élégant. »

Extrait d'une page manuscrite de la lettre de Gabriel Cramer à Leohnard Euler
11 novembre 1744, sixième lettre de cette correspondance



Votre remarque ne peut que me ...
Souffrés que je vous propose le Theoreme que j'ai trouvé sur cette Matiere, & que l'amour propre me fait trouver ...
élegant. Soient plus. inconnues z, y, x, v, &c. & autant d'equations $A^1 = Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \&c.$, $A^2 = Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \&c.$
$A^3 = Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \&c.$ $A^4 = Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \&c.$, où les lettres A^1, A^2, A^3, A^4, &c. ne marquent pas, comme
à l'ordinaire, des puissances de A, mais le premier membre, supposé connu, de la prem. 2. 3. 4. equation. De même
Z^1, Z^2, Z^3, Z^4 &c. sont les coefficients de z; X^1, X^2, X^3, X^4, &c. ceux de x, &c. dans la 1. 2. 3. 4. &c. equation. Cette
Notation supposée, s'il n'y a qu'une equation & une inconnue z, on aura $z = A^1 : Z^1$. S'il y a deux equations & deux
inconnues, on trouvera $z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$, et $y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$. S'il y a 3 eq. & 3 inconnues, on trouvera $z =$

$$\frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1},\quad y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^2Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1},\quad x =$$

$$\frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 - Z^2Y^1A^3 + Z^2Y^3A^1 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}.\ \&c.$$

D'où l'on forme cette Regle générale.
Le nombre des équations & celui des inconnues étant n, on trouvera la valeur de chaque inconnue en formant
autant de fractions, dont le Denominateur commun a autant de termes qu'il y a d'arrangemens d'ordre de n choses
... Chaque terme est composé des lettres $ZYXV$ &c. toujours rangées dans cet ordre, mais auxquelles on distri- ... les manieres possibles. Ainsi, quand il y a trois

Photographie de l'original, Bernoulli-Euler-Zentrum Bâle

Résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode de Cramer

Soit le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} 2x+7y+1z=828 \\ 18x+2y+8z=45 \\ 9x \qquad +4z=52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 18 & 2 & 8 \\ 9 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 828 \\ 45 \\ 52 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 828 \\ 45 \\ 52 \end{pmatrix}$$

Les coefficients et les constantes de ce système sont les 17 premiers chiffres constituant le nombre d'Euler e = 2,7182818284 5904523536 0287471352 66249…

Notons $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 18 & 2 & 8 \\ 9 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients du système

Le déterminant de la matrice vaut $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 18 & 2 & 8 \\ 9 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -2$

Calculer ensuite les déterminants Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 dans lesquels les colonnes 1, 2 et 3 de Δ sont successivement remplacées par les constantes du système :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 828 & 7 & 1 \\ 45 & 2 & 8 \\ 52 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8172 \quad \text{d'où } x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8172}{-2} = -4086$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 828 & 1 \\ 18 & 45 & 8 \\ 9 & 52 & 4 \end{vmatrix} = 59 \quad \text{d'où } y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{59}{-2}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 828 \\ 18 & 2 & 45 \\ 9 & 0 & 52 \end{vmatrix} = -18413 \quad \text{d'où } z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-18413}{-2} = \frac{18413}{2}$$

La solution du système proposé est $S = \left\{ \left(x; y; z\right) = \left(-4086; -\frac{59}{2}; \frac{18413}{2} \right) \right\}$

Extrait de la Lettre 19 de L. Euler à G. Cramer

Berlin, 2 novembre 1751

« Plus que je considere la maniere d'exprimer Vos formules pour les facteurs des racines des équations, plus j'en admire les avantages qu'elle fournit dans cette espece de récherches, et je ne doute pas qu'une semblable methode de s'exprimer ne soit propre à porter toute l'algebre à un plus haut degré de perfection »

Malade, Cramer n'eut pas la force de répondre à cette dernière lettre. Il mourut le 4 janvier 1752

Ce que Cramer et Euler ignoraient, c'est qu'un mathématicien japonais avait déjà esquissé une même règle avant 1683

Conclusion

L'histoire des Opera Omnia

- Projet plus que centenaire (1907) et international
- Travaux d'Euler en ligne http://eulerarchive.maa.org/
  maa = Mathematical Association of America
  - les 865 écrits du savant
  - scans de lettres, dont la correspondance Euler – Goldbach, en langue originale
  - des commentaires et des références
- En 2014, difficultés à trouver des scientifiques et des historiens scientifiques bénévoles et compétents pour éditer le reste de la correspondance et les manuscrits
- La publication électronique offre néanmoins la perspective de rendre un jour tous les écrits d'Euler accessibles à la communauté scientifique

Euler un regard vers le futur

Vidéo du Dr. Peter Buser d'une durée de 12 minutes
http://www.math.ch/videos/Euler_F.php
Sous le titre Swiss Mathematical Society

Bibliographie

Académie suisse des sciences naturelles : http://www.scnat.ch/

Bernoulli-Euler-Zentrum Bâle : http://www.euler-2007.ch/ va devenir
http://www.bez.unibas.ch/

Bodenmann Siegfried « *La République des sciences vue à travers le commerce épistolaire de Léonhard Euler* », *Dix-huitième siècle* 1/2008 (n° 40), p. 129-151.
URL : www.cairn.info/revue-dix-huitieme-siecle-2008-1-page-129.htm

Dictionnaire Historique de la Suisse : http://www.dhs.ch/

Editions Birkhäuser : http://www.birkhauser.ch/

Emil Fellmann & **Hans Christoph Imhof,** *Die Euler-Ausgabe - Ein Bericht zu ihrer Geschichte und ihrem aktuellen Stand*, Jahrbuch Überblicke Mathematik, N.S. 3 (1993), p. 185-198

Euler Leonhard, *Correspondance*, Collection : Leonhard Euler, Opera Omnia, Vol. 4A / 7 , Sous Collection : Commercium epistolicum , les 4 éditeurs du Vol. 4A 7 sont :
Siegfried Bodenmann, Vanja Hug, Mirjana Ilic et Andreas Kleinert, ISBN 978-3-7643-8743-3, env. 600 pages, à paraître en juin 2015 aux éditions Birkhäuser à Basel

Euler Leonhard, http://math.dartmouth.edu/~euler/, *les travaux d'Euler en direct*
The Euler Archive is directed by Dominic Klyve (Central Washington University), Lee Stemkoski (Adelphi University), and Erik Tou (Carthage College), and is hosted by the Mathematical Association of America

Euler Leonhard, http://eulerarchive.maa.org/, Article E65, *Methodus,* Lausanne 1744

Grinneart François et Laurens Jean-Marc, *Stabilité du navire*, ENSTA Bretagne, Editions ellipse 2013

Henry Philippe, *Leonhard Euler, incomparable géomètre*, éditions Médecine et hygiène, Genève, 2007

Kleinert Andreas (Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Germany) and **Mattmüller Martin** (Bernoulli-Euler-Zentrum Bâle), *Leonhardi Euleri Opera Omnia : a centenary project*, Newsletter of the European Mathematical Society, September 2007, Issue 65, ISSN 1027-488X, p.25-31

Schumacher Mireille, *Leonhard Euler, un mathématicien universel*
Metz 2012, P2-32 http://www.apmep.asso.fr/Ateliers-du-lundi-matin,4800 ;
Correspondance de L. Euler avec ses contemporains, dont Gabriel Cramer
Marseille 2013, P1-22 http://www.apmep.asso.fr/Ateliers-du-dimanche-matin,5207 ;
www.euler-ch.org

Sigrist René, *Correspondance scientifique du XVIIIème siècle. Présentation d'une méthode de comparaison*, Revue suisse d'histoire, vol.2, 2008, pp.147-177
SGG-SSH: SZG