Sangaku ou énigmes géométriques japonaises

Mireille Schumacher
Dr. es sciences
schumacher.mireille@gmail.com

Séminaire Mathématiques et Société
Institut de Mathématiques de l'Université de Neuchâtel
22 avril 2015

Sommaire

- *Introduction historique*
- *Galerie de sangaku*
- *Résolution et construction d'un sangaku :*

  Ogive gothique – Origami – Les trois cercles
- *Chercher et approfondir*
- *Conclusion*
- *Bibliographie*

Introduction historique

- Au cours des XVIIème et XVIIIème siècles, le Japon fut isolé du reste du monde

- Après des siècles de guerres civiles, les shoguns de la dynastie Togukawa rétablissent l'ordre dans le pays

- Ils prennent la décision d'installer la capitale administrative et politique à Edo (l'actuel Tokyo), au détriment de Kyoto (capitale impériale du Japon depuis 749)

Edo : du village de pêcheurs à la plus grande ville du monde

C'est l'époque d'Edo qui s'étend de 1603 – 1868
ère de paix et de prospérité

- Le Japon connait un développement économique sans précédent
- Un grand mouvement culturel se déploie
- C'est l'âge d'or de l'art
- Les estampes d'**Hokusai** (1760 – 1849) témoignent d'une grande liberté d'expression dans une société très codifiée et d'une virtuosité exceptionnelle

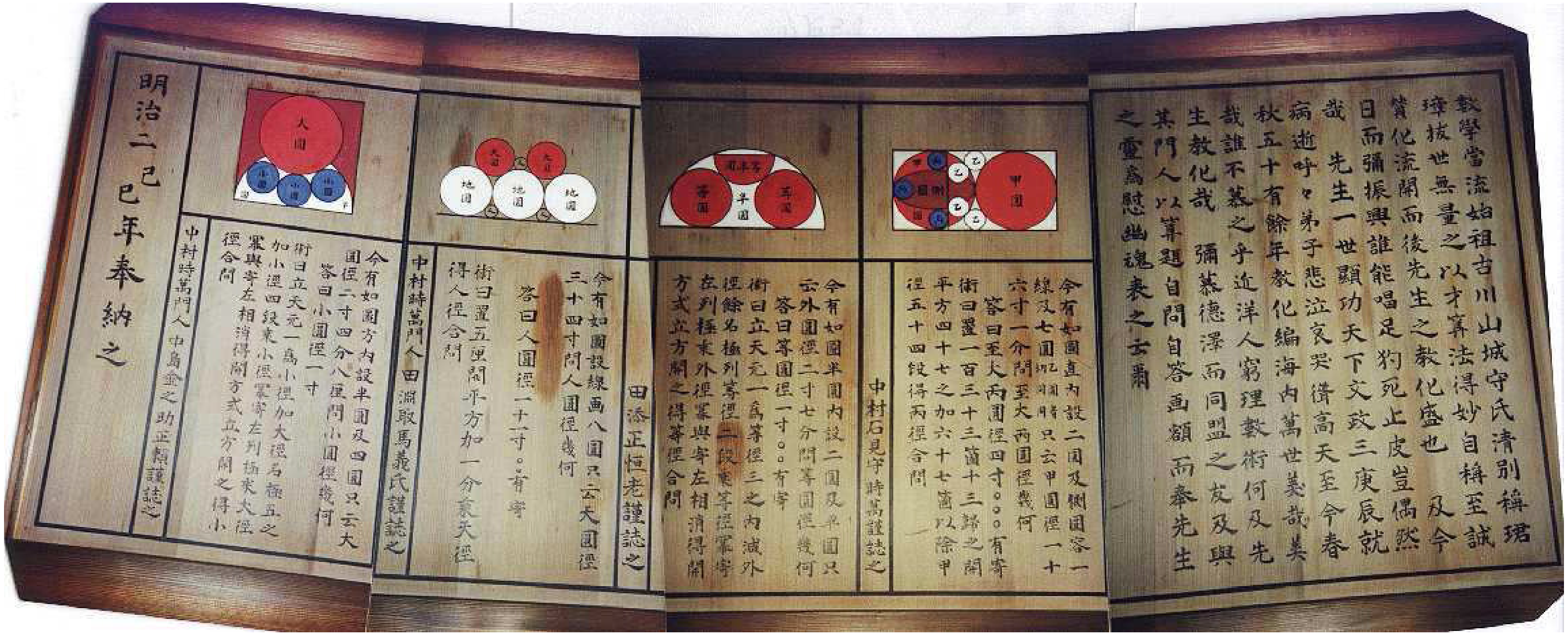
La Grande Vague au large de Kanagawa

Série trente-six vues du mont Fuji vers 1830-1834

- Jusqu'au début du XVIIème siècle, les mathématiques japonaises s'inspiraient fortement de celles de la Chine
- Pendant la période d'Edo, se méfiant des européens et des chinois, le shogunat décide de fermer les frontières. Seuls les Hollandais, en 1639, sont autorisés à pénétrer sur le territoire, permettant quelques échanges
- Les sciences japonaises évoluèrent indépendamment de leur équivalent européen, c'est l'envol du ***wasan*** ou de la ***mathématique japonaise***
- 1627 : Publication du *Jinkôki* (Traité inaltérable) de Yoshida Mitsuyoshi
- Travaux de Seki Takakazu (1642 – 1708) et de son célèbre et brillant élève Takebe Katahiro (1664 – 1739)

La vie quotidienne dans une école de mathématiques
à l’époque des shoguns Tokugawa (1600-1868)

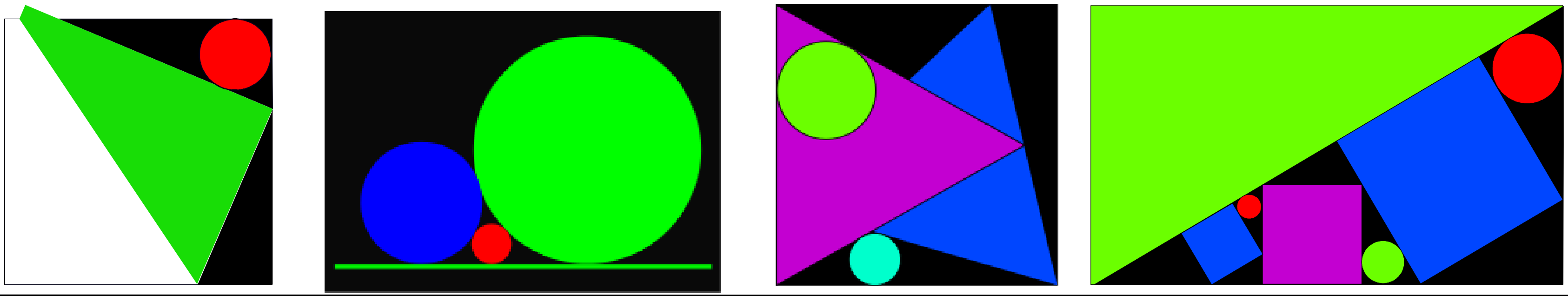
- Sangaku exposé dans la ville de Tokyo au temple de Toenji
- Tablette datée de 1869 (180cm x 90cm)

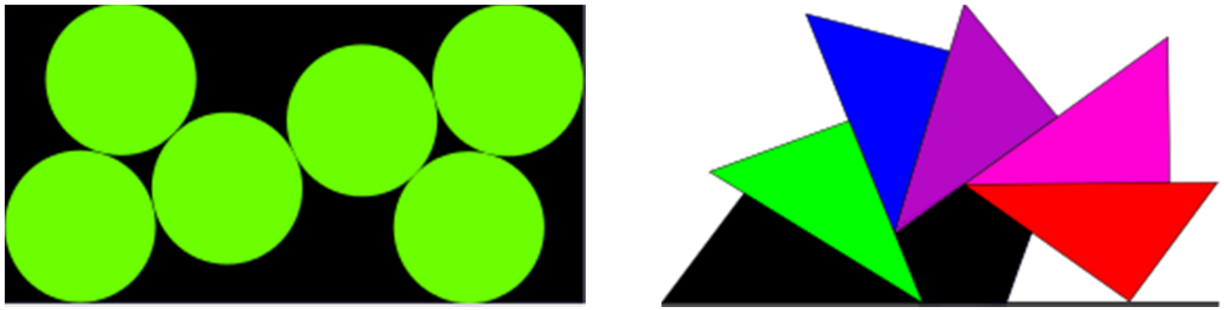


- 1683 : le plus ancien sangaku retrouvé
- Entre 800 et 900 tablettes retrouvées
- *Japanese Temple Geometry Problems*, de Hidetoshi Fukagawa et Daniel Pedoe, 1989

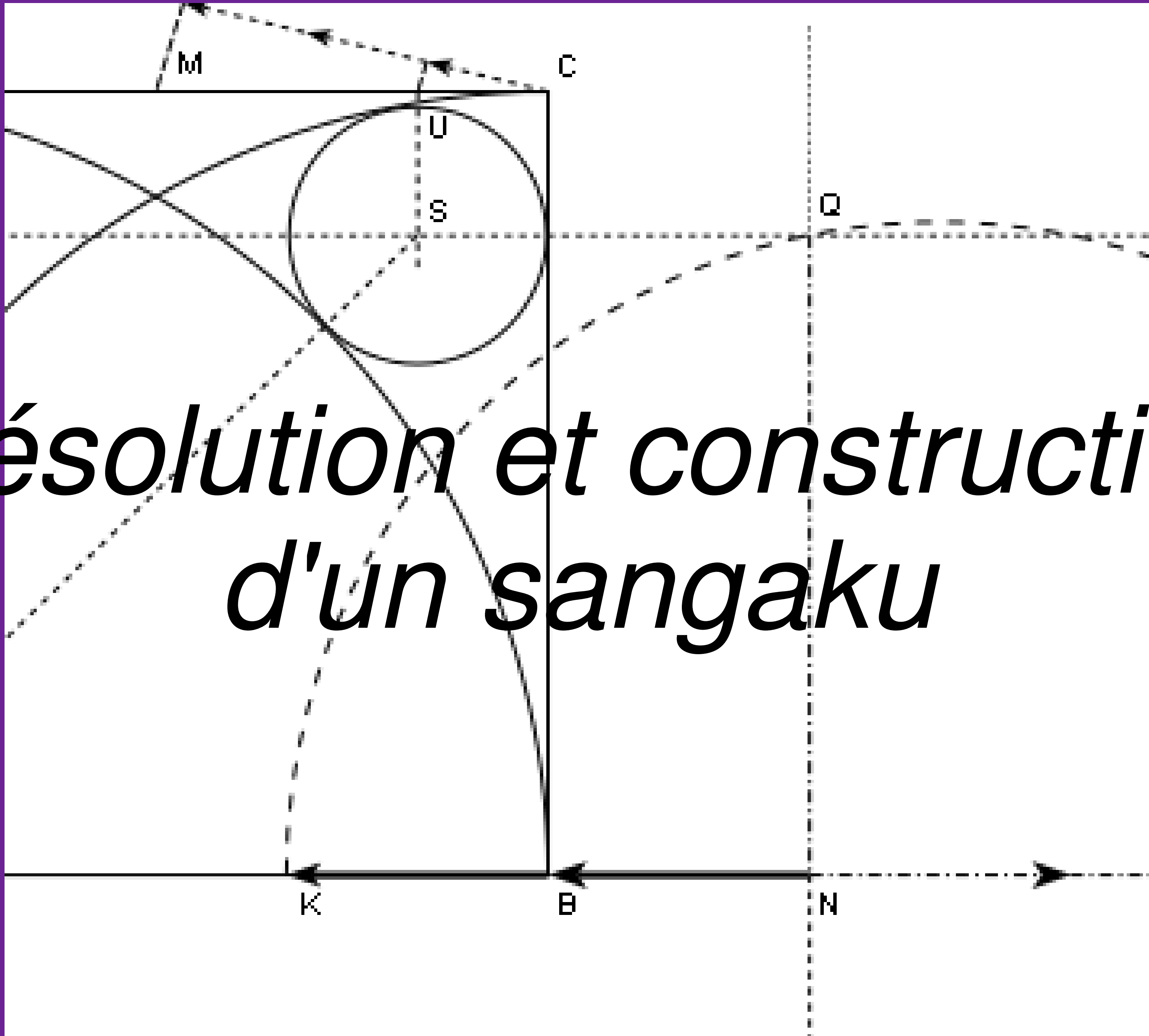
Première publication de sangaku

Galerie de sangaku

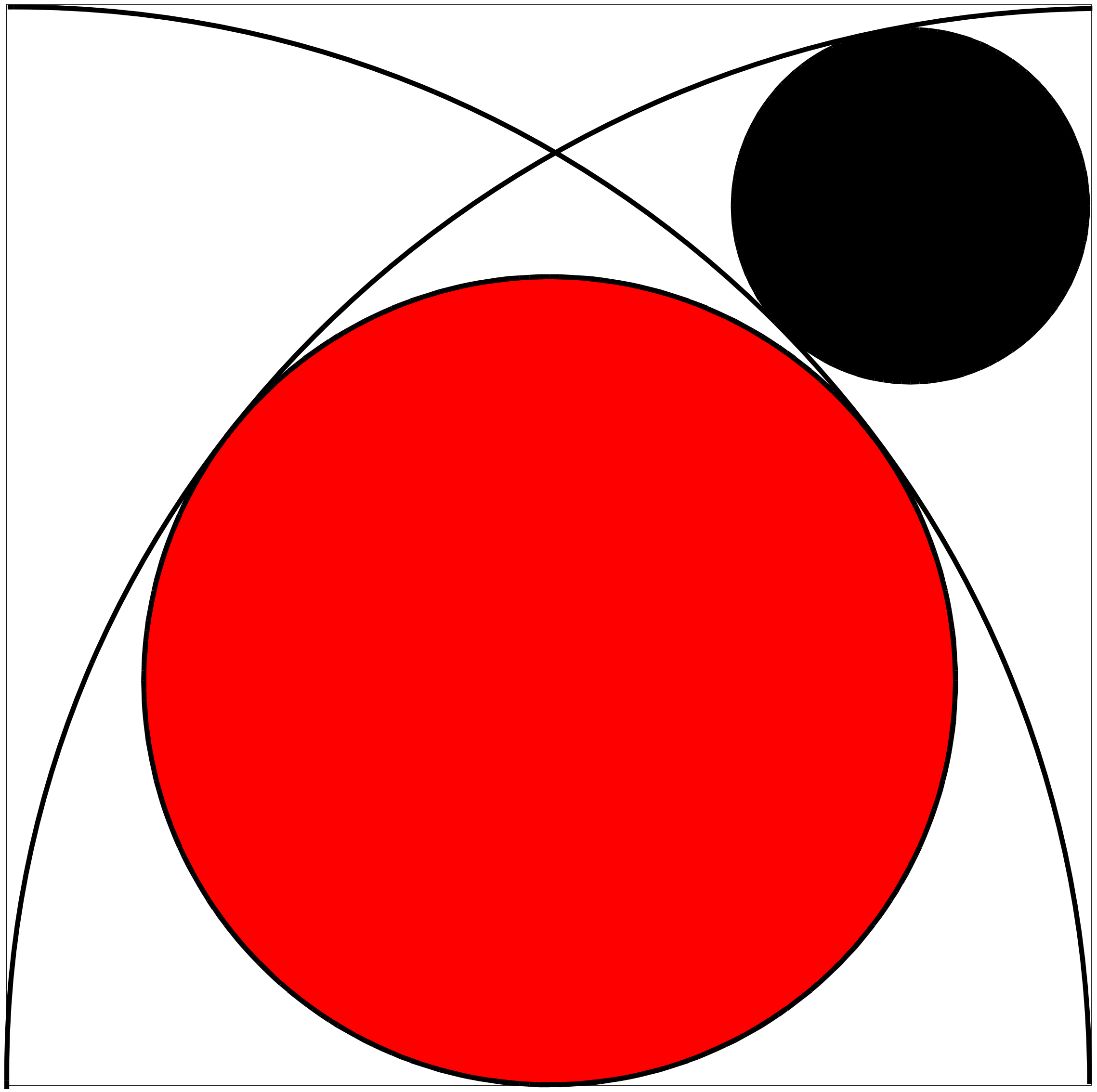




Résolution et construction d'un sangaku

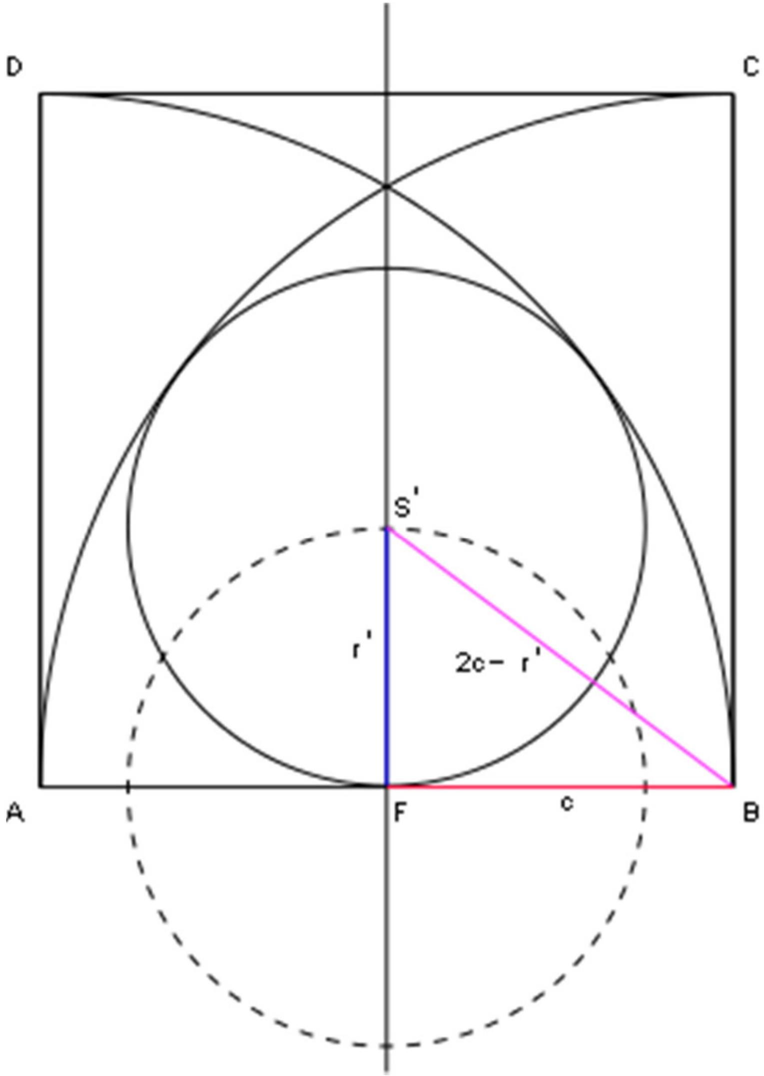


Ogive gothique



i) Construction du grand cercle

Soit *ABCD* un carré de côté 2*c*. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle *FBS'* permet d'exprimer *r'* en fonction de *c*.

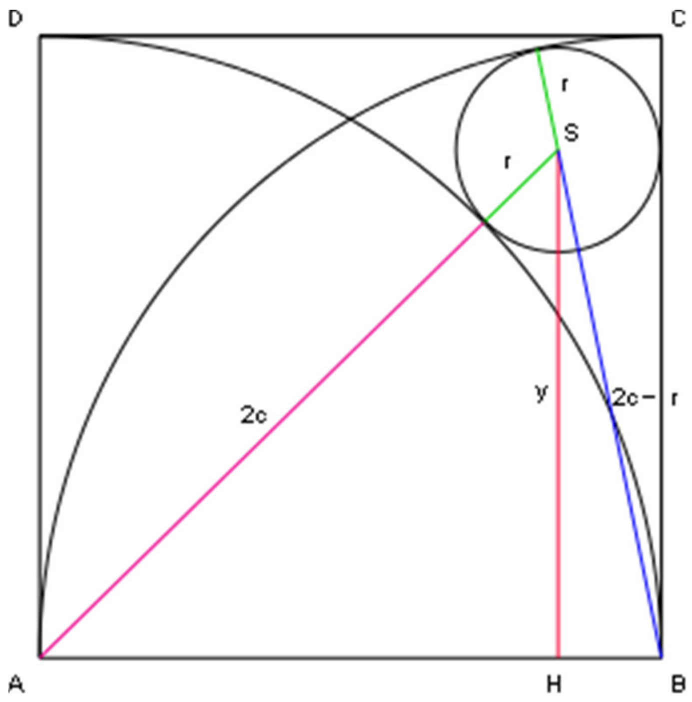


$$(2c - r')^2 = (r')^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad r' = \frac{3}{4}c$$

Le centre *S'* du grand cercle est le point d'intersection de la médiatrice du côté AB du carré et d'un cercle centré au milieu de AB et de rayon $r' = \frac{3}{4}c$

ii) Construction du petit cercle

r = rayon petit cercle
y = ordonnée du centre S du petit cercle
Le théorème de Pythagore appliqué aux triangles rectangles *AHS* et *BSH* permet d'exprimer *r* et *y* en fonction de *c*.



$$\begin{cases} (2c-r)^2 + y^2 = (2c+r)^2 & \text{triangle } AHS \\ r^2 + y^2 = (2c-r)^2 & \text{triangle } BSH \end{cases}$$

Soustraire membre à membre les 2 équations pour éliminer y^2 :

$$(2c-r)^2 - r^2 = (2c+r)^2 - (2c-r)^2 \iff$$

$$4c^2 - 4cr + r^2 - r^2 =$$

$$4c^2 + 4cr + r^2 - \left(4c^2 - 4cr + r^2\right) \iff r = \frac{c}{3}$$

Reprenons la deuxième équation du système :

La deuxième équation du système est équivalente à :

$$y^2 = (2c-r)^2 - r^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = (2c-r-r)(2c-r+r) \quad \Leftrightarrow$$

$$y^2 = (2c-2r)\cdot 2c \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 4c\cdot(c-r)$$

Qui devient en substituant $r = \dfrac{c}{3}$:

$$y^2 = 4c\cdot\left(c-\frac{c}{3}\right) = 4c\cdot\frac{2c}{3} = 4c^2\cdot\frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y = 2c\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2c\cdot\sqrt{6}}{3}$$

Construction du cercle de centre S et de rayon r

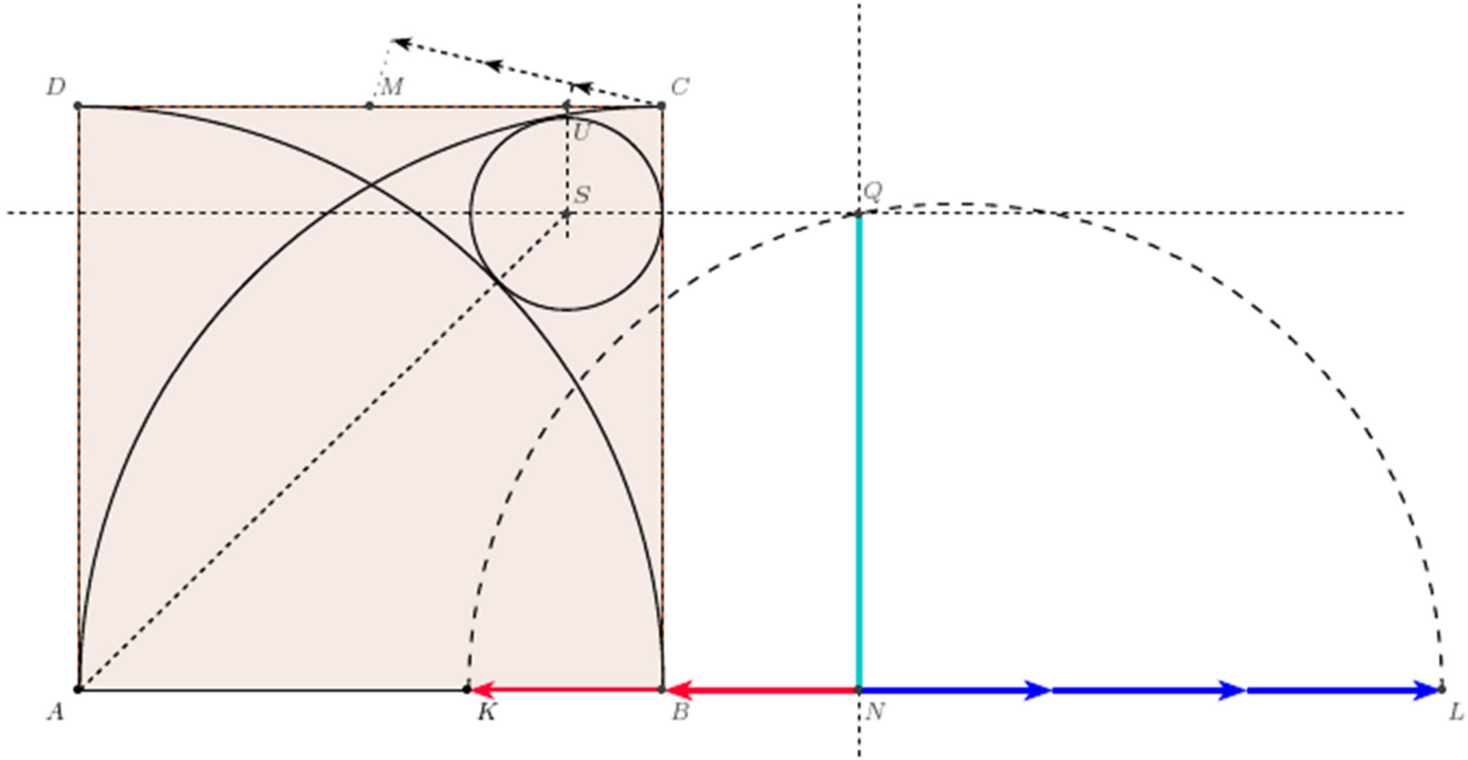
1) *Lieu géométrique du point S*

2) *Construction de l'ordonnée y du point S*

1) *Lieu géométrique du point S*

Soit *M* le point milieu de *CD*. Puisque $r = \frac{c}{3} = \frac{CM}{3}$

construire par le théorème de Thalès le point *U* situé au tiers de *CM* à partir de *C*. *Le point S se trouvera sur la droite perpendiculaire à CD passant par U*.

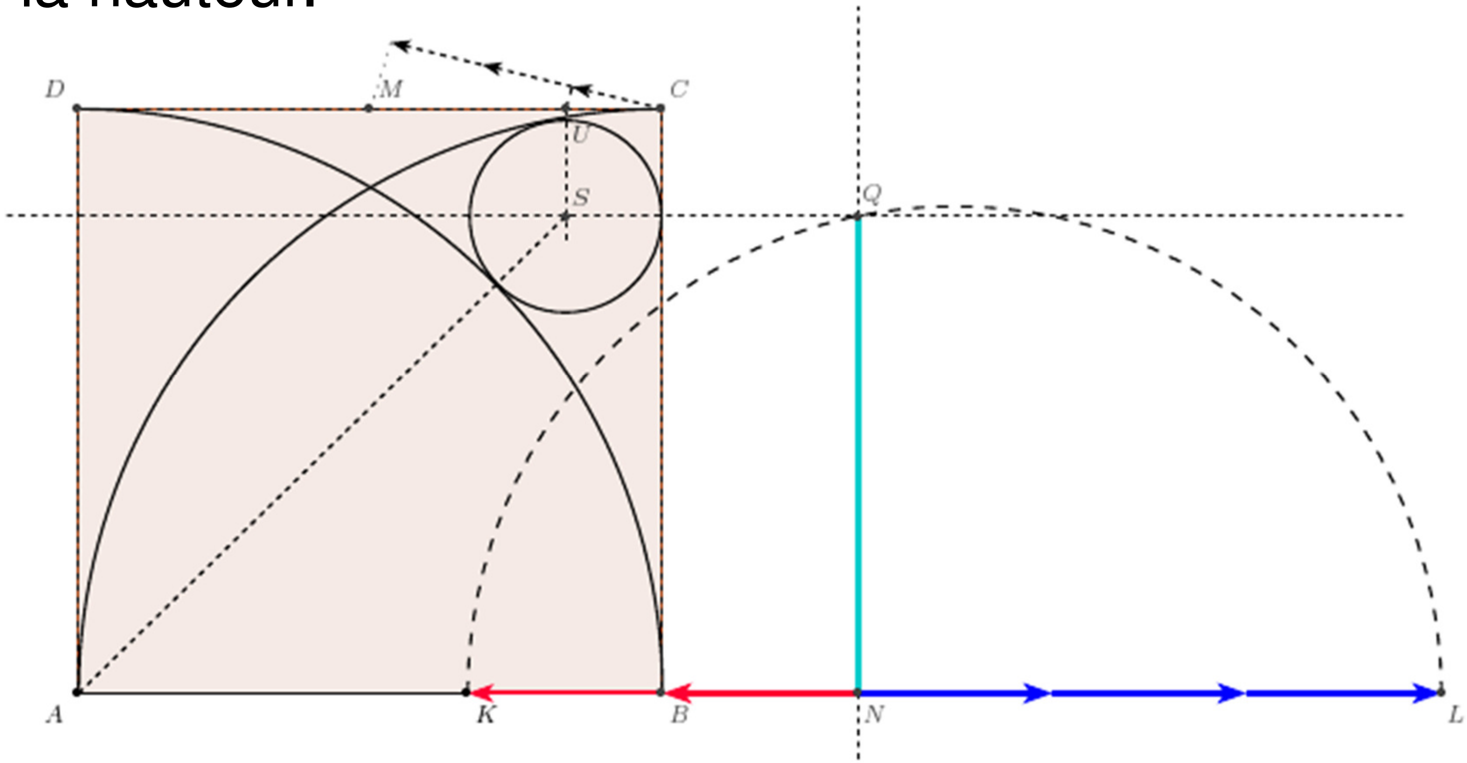


2) *Construction de l'ordonnée y du point S*

$$y = \frac{2c \cdot \sqrt{6}}{3} = 2r \cdot \sqrt{6} = \delta \cdot \sqrt{6}$$

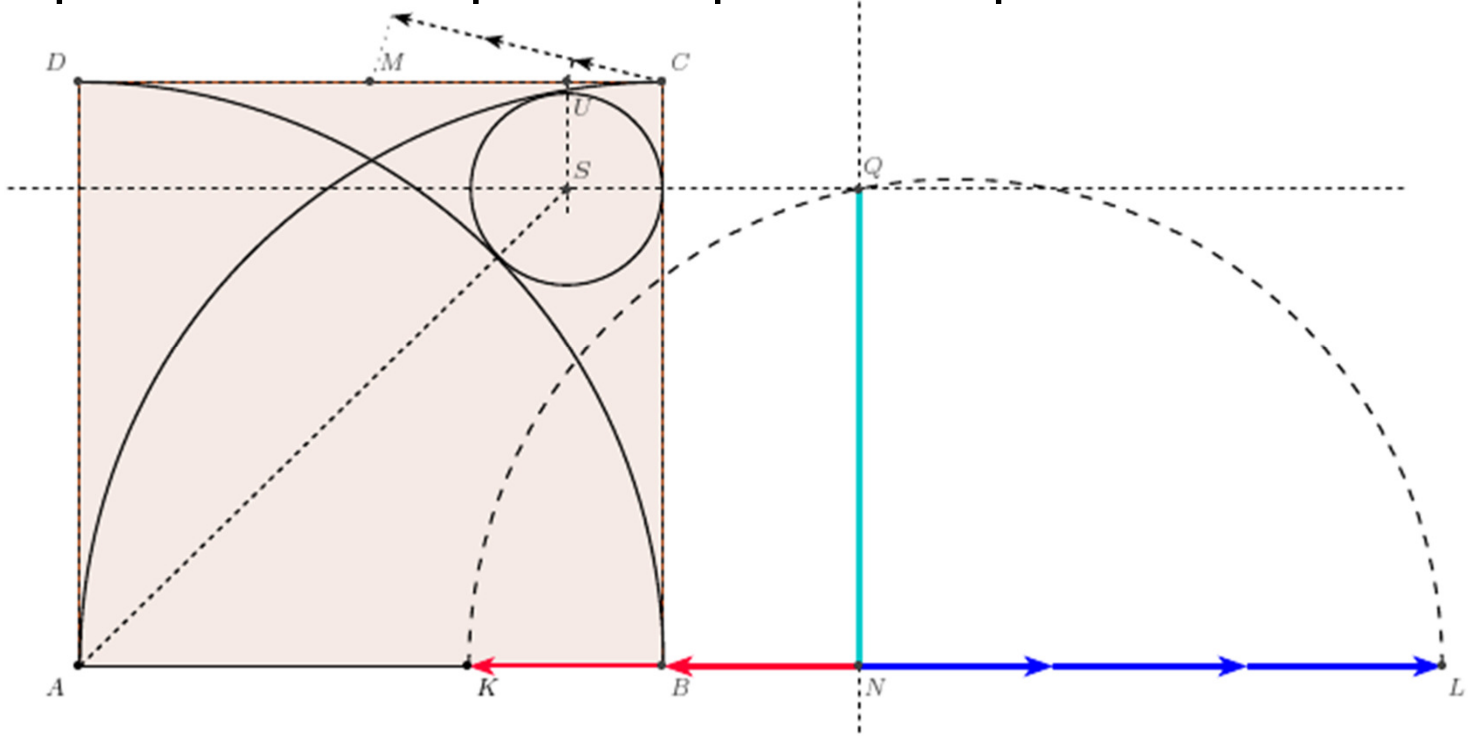
où $\delta = 2r =$ diamètre du cercle cherché.

Il s'agit de construire à la règle et au compas un segment de longueur $\delta \cdot \sqrt{6}$. Par exemple par la méthode du thèorème de la hauteur.

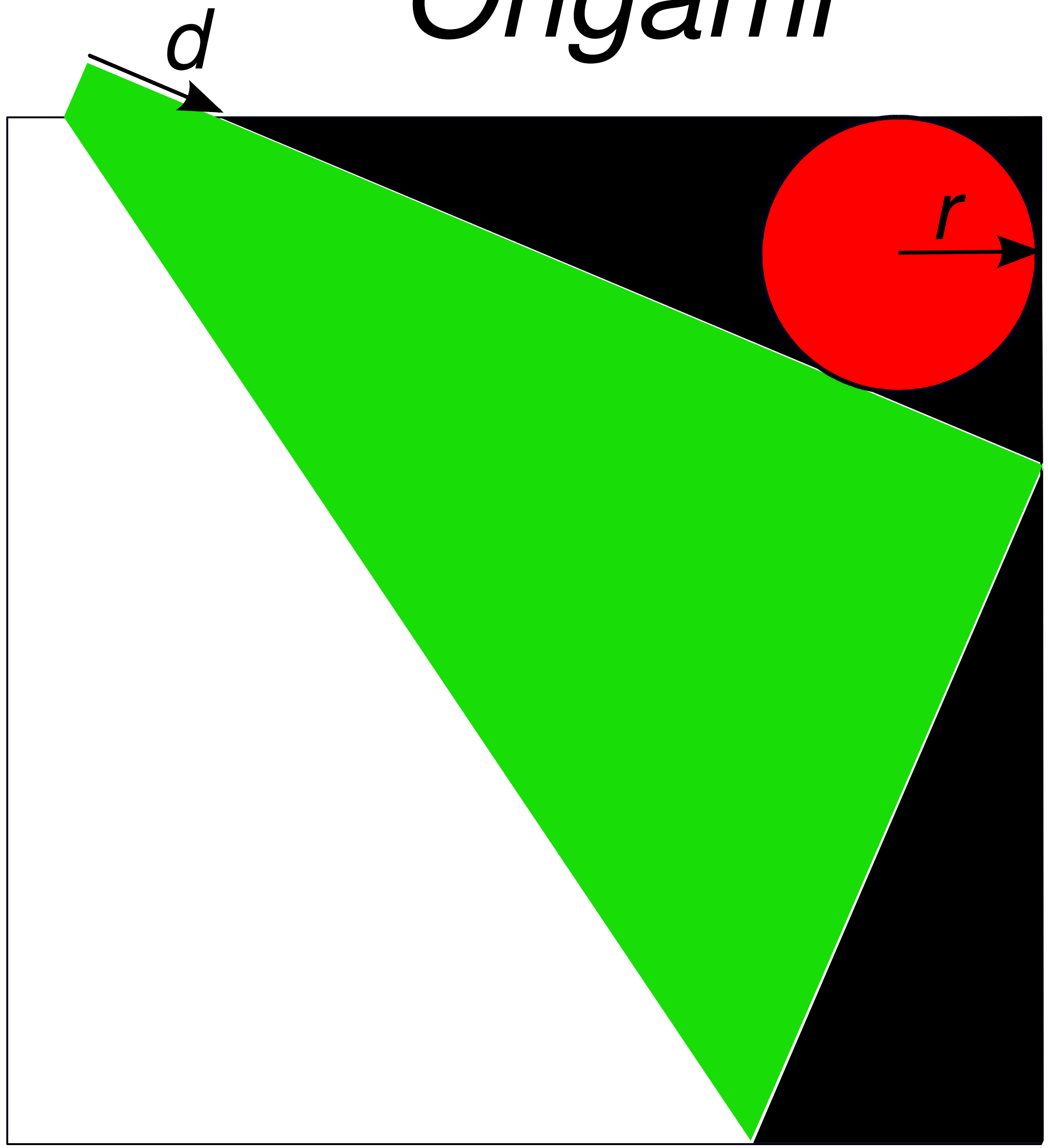


Construction de $\delta \cdot \sqrt{6}$ *par le théorème de la hauteur*

- Placer un point *N* sur la droite *AB* à distance $\delta = 2r$ de *B*
- Sur cette droite, reporter de part et d'autre du point *N* deux segments de longueur 2δ et 3δ respectivement. On obtient deux points *K* et *L*
- Tracer le cercle de Thalès du segment *KL*
- La perpendiculaire à *KL* issue de *N* coupe l'arc supérieur de ce cercle de Thalès en un point *Q*
- $NQ^2 = 2\delta \cdot 3\delta \Leftrightarrow NQ^2 = 6\delta^2 \Leftrightarrow NQ = \delta \cdot \sqrt{6} = y$
- La parallèle à *AB* passant par *Q* coupe la droite *d* en *S*

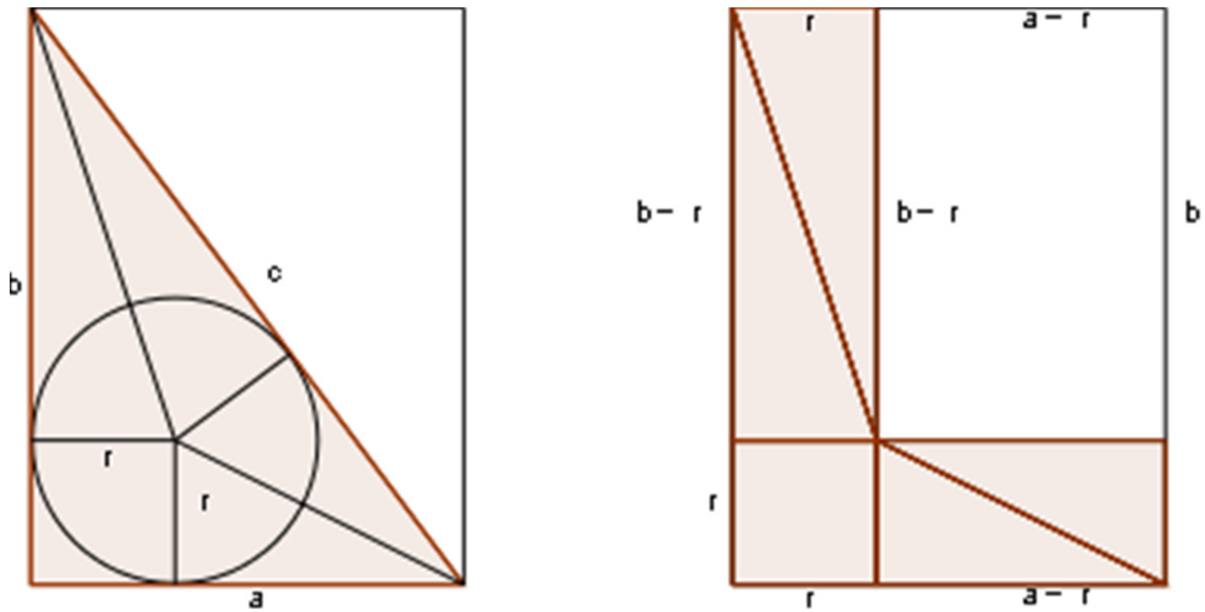


Origami



$r = d$

Lemme préparatoire : Dans un triangle rectangle, le diamètre du cercle inscrit vaut la somme des longueurs des cathètes diminuée de la longueur de l'hypoténuse.



$$2r = (a+b) - c$$

Démonstration

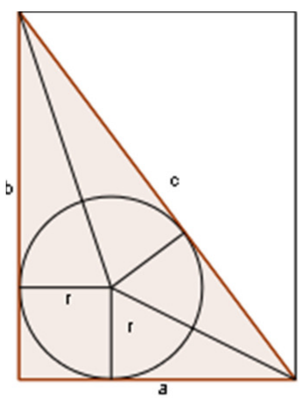
- l'aire ombrée de la première figure vaut

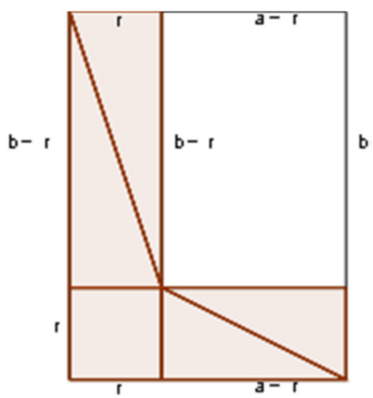
$$\sigma = r^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}r(a-r)+\frac{1}{2}r(b-r)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = r(a+b-r)$$

- en déplaçant les triangles on obtient dans la deuxième figure une aire ombrée égale à la précédente

- Donc les aires blanches sont égales

$$r(a+b-r)=(a-r)(b-r) \quad \Leftrightarrow \quad 2r^2-2(a+b)r+ab=0$$





$$\Leftrightarrow \quad r=\frac{(a+b)\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

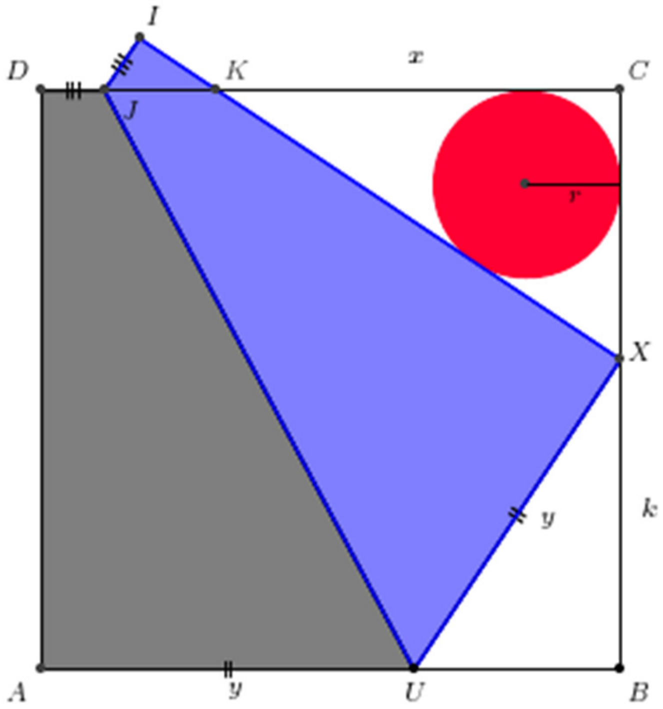
- Substituer a^2+b^2 par c^2

- La solution « - » donne

$$2r=(a+b)-c$$

C.Q.F.D

Il s’agit de démontrer que $r = KI$



Soit *ABCD* un carré de côté 1

Par similitude des triangles rectangles

XCK et *UBX* on établit la relation :

$$\frac{x}{1-k} = \frac{k}{1-y} \quad (1)$$

Le théorème de Pythagore s'applique

aux triangle *UBX* : $k^2 + (1-y)^2 = y^2$ (2)

et *XCK* : $XK^2 = (1-k)^2 + x^2$ (3)

Résoudre le système de 2 équations à 2 inconnues (1) et (2) :

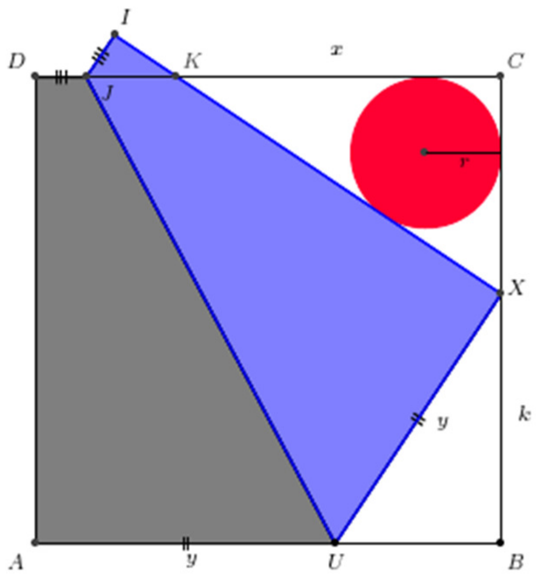
$$\begin{cases} \dfrac{x}{1-k} = \dfrac{k}{1-y} \\ k^2 + (1-y)^2 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2k}{1+k} \\ y = \dfrac{1+k^2}{2} \end{cases} \qquad k \neq 1$$

substituer $x = \dfrac{2k}{1+k}$ dans (3)

On obtient $XK^2 = (1-k)^2 + x^2 = (1-k)^2 + \left(\dfrac{2k}{1+k}\right)^2 = \ldots = \dfrac{(1+k^2)^2}{(1+k)^2}$

D'où $XK = \dfrac{1+k^2}{1+k}$

Puisque $KI = 1 - XK$ alors $KI = 1 - \dfrac{1+k^2}{1+k} = \dfrac{k-k^2}{1+k}$ (4)



En appliquant le lemme, le diamètre $2r$ du cercle inscrit dans le triangle rectangle *XCK* est égal à :

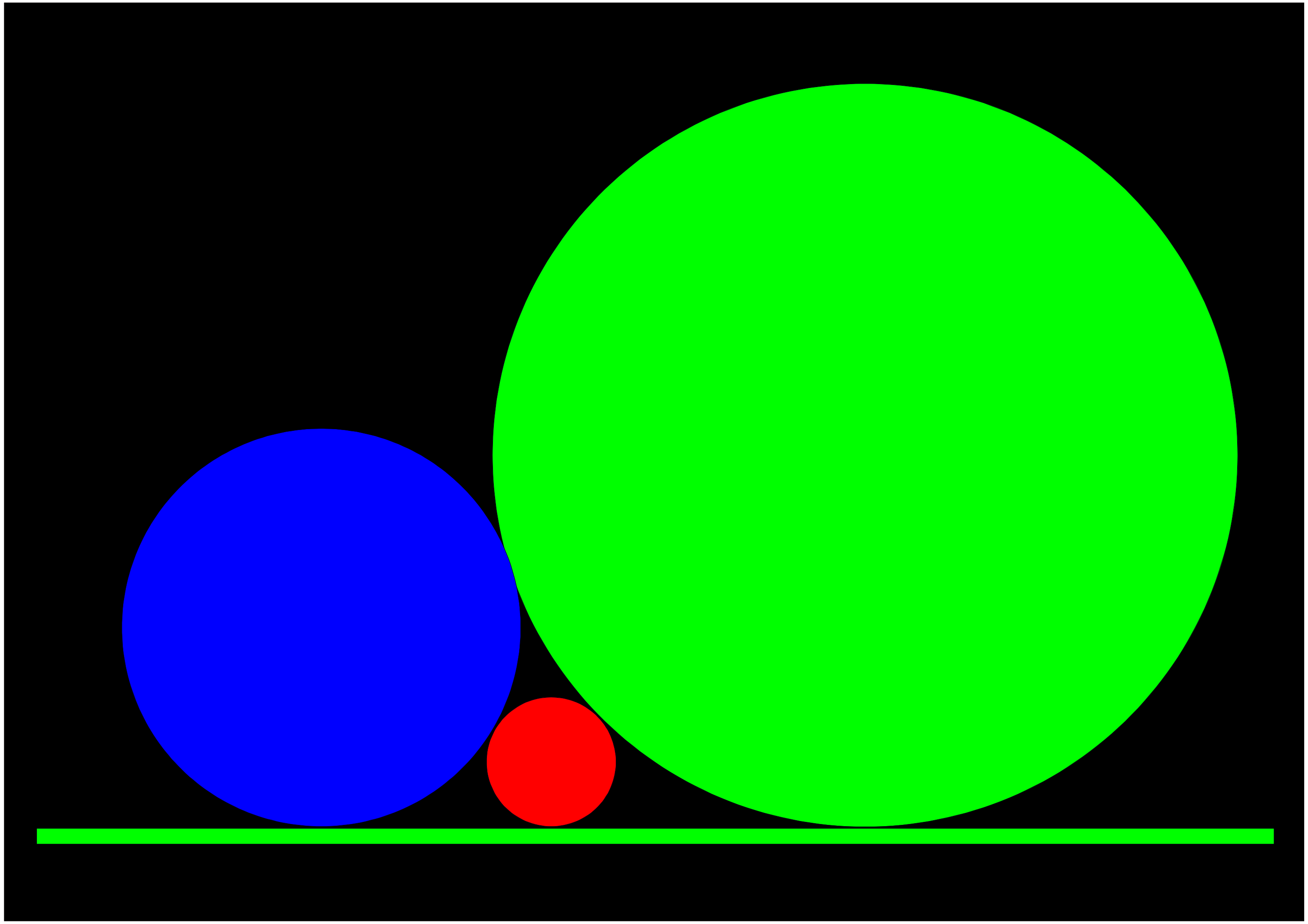
$$2r = (1-k) + x - XK = (1-k) + \frac{2k}{1+k} - \frac{1+k^2}{1+k} = \frac{2k-2k^2}{1+k}$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{k-k^2}{1+k} \quad (5)$$

Les formules (4) et (5) étant identiques, il en découle que $r = KI$.

Les trois cercles

Le plus célèbre des sangaku, Japon tablette de 1874



L'énigme consiste à établir un lien entre les rayons de ces trois cercles

La **résolution** de ce sangaku repose sur le résultat suivant :

« Soit deux cercles *C* et *C'* de rayons *r* et *r'* tangents entre eux.
La distance entre les points de contact d'une tangente commune avec ces cercles est égale à $2\sqrt{r \cdot r'}$ »

$$y^2 + (r - r')^2 = (r + r')^2 \Leftrightarrow$$

$$y^2 + r^2 - 2r \cdot r' + r'^2 = r^2 + 2r \cdot r' + r'^2 \Leftrightarrow$$

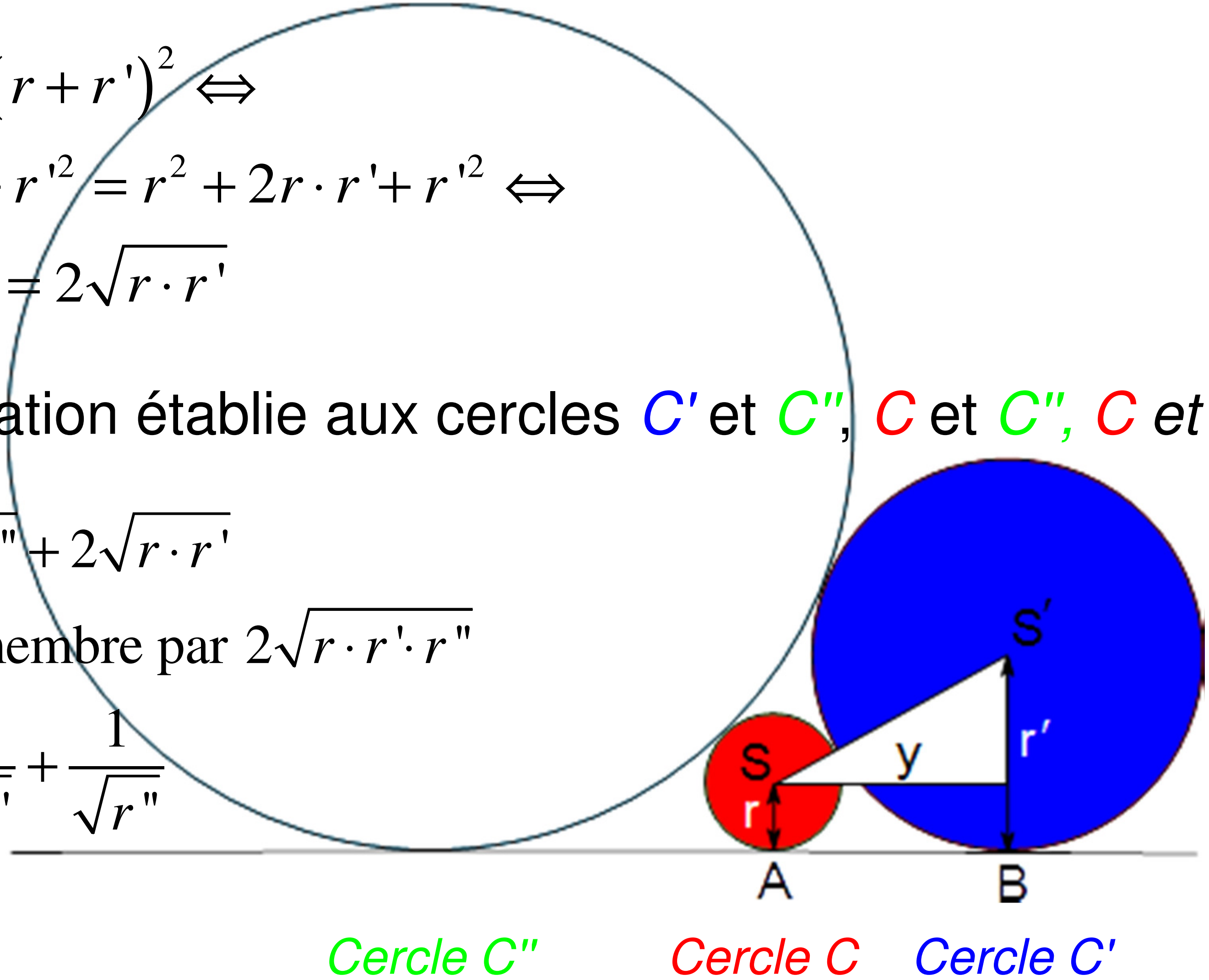
$$y^2 = 4r \cdot r' \Leftrightarrow y = 2\sqrt{r \cdot r'}$$

Appliquer la relation établie aux cercles *C'* et *C''*, *C* et *C''*, *C et C'*

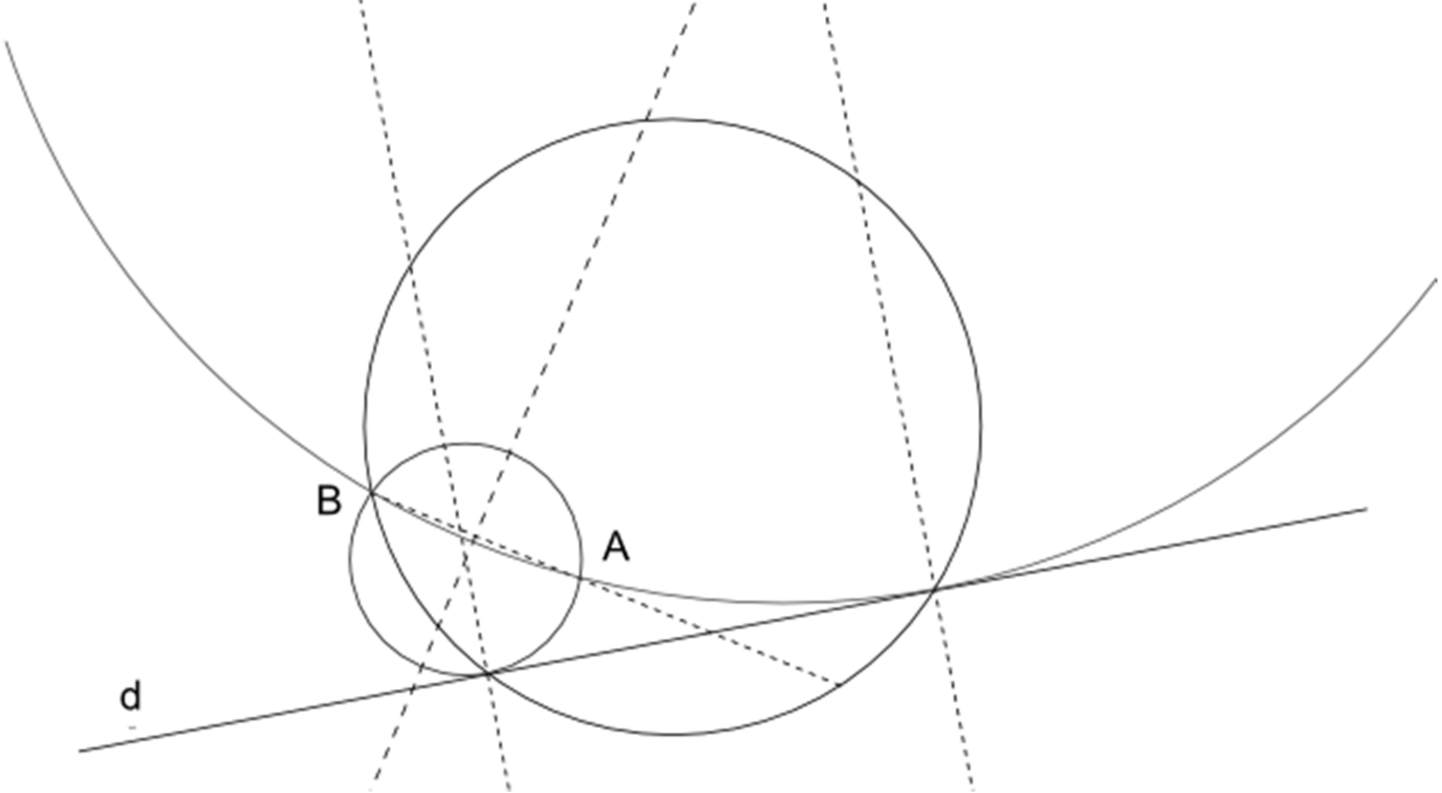
$$2\sqrt{r' \cdot r''} = 2\sqrt{r \cdot r''} + 2\sqrt{r \cdot r'}$$

Diviser chaque membre par $2\sqrt{r \cdot r' \cdot r''}$

Il vient $\dfrac{1}{\sqrt{r}} = \dfrac{1}{\sqrt{r'}} + \dfrac{1}{\sqrt{r''}}$



La **construction** exclusivement géométrique de ce sangaku n'est pas sans rappeler les *10 problèmes d'Apollonius de Perge* (262 - 190 av. J.-C) géomètre et astronome grec



Construction d'un cercle astreint aux trois conditions : tangent à une droite *d*, passant par deux points *A* et *B*

PPD, troisième problème d'Apollonius

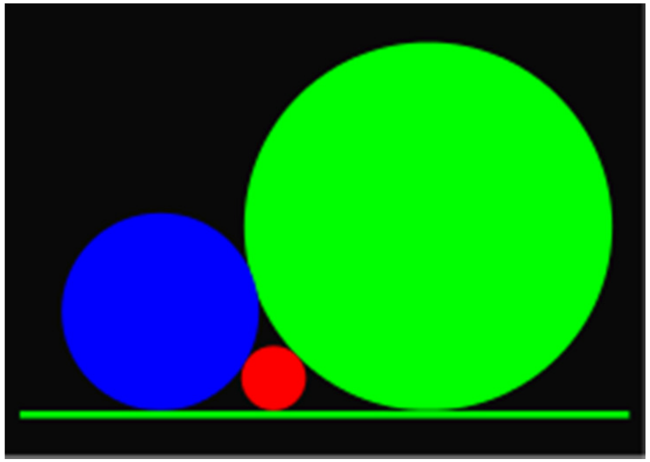
Le *Traité des contacts*, ouvrage perdu d'Apollonius, se proposait de déterminer des cercles astreints à trois conditions prises parmi celles qui consistent à *passer par un point* donné, ou à *être tangent à une droite ou un cercle* donné, ce qui correspond à dix problèmes désignés par les symboles PPP, DDD, PPD, PPC, PDD, PCC, PDC, DDC, DCC et CCC en représentant un point par P, une droite par D et un cercle par C

Le problème CCC, des trois cercles, a été présenté par Pappus comme étant le dixième et le plus difficile. C'est un des grands problèmes de l'Antiquité grecque

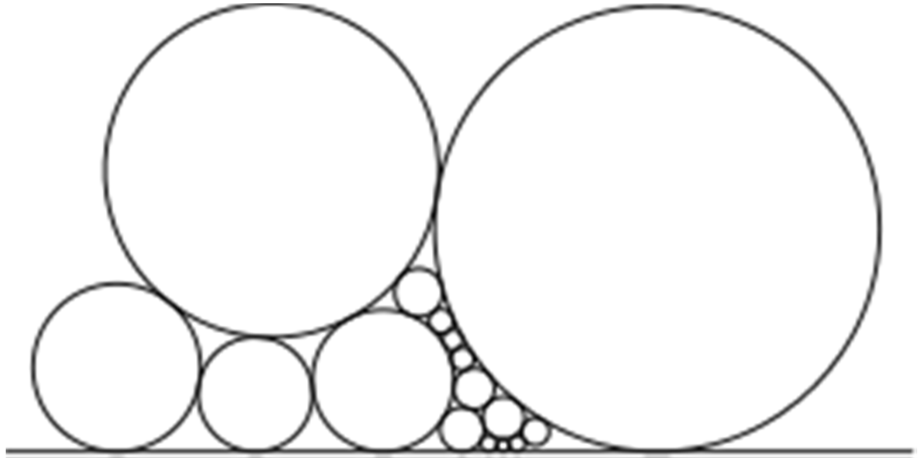
Dans l'*Apollonius Gallus*, François Viète (1540 – 1603) va résoudre les dix problèmes de contact

Chercher et approfondir

Empilements de cercles



Sangaku *Les trois cercles*



© R. W. Brooks « circle packings »

- Ces compositions semblent avoir été étudiées à la même époque
- La figure de droite est extraite des travaux d'*empilement de cercles* ou *circle packings* du mathématicien Robert W. Brooks (Washington 1952 – Montréal 2002)
- Le célèbre « *Brook's circle packing parameter theorem* » joue un rôle important dans les travaux contemporains de recherche pour l'approche de l'uniformisation des surfaces de Riemann
- En 2005, dans un article en hommage à Robert Brooks, le professeur Peter Buser donne une nouvelle preuve de ce théorème

Conclusion

Résoudre ou construire des sangaku c'est :

- Disposer d'un support pédagogique stimulant pour explorer de belles mathématiques
- Observer, conjecturer, analyser, chercher, comprendre
- Entrer dans une autre géométrie du triangle dans laquelle un triangle est avant tout un polygone plein, avec pour objets fondamentaux son aire, son périmètre et son cercle inscrit
- Mettre en évidence le cheminement vers une démonstration
- Utiliser des transformations géométriques : homothéties, inversion pour construire
- Aborder des problèmes historiques
- Le livre « ***Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises*** » de Géry Huvent (HUVENT G., 2008) qui m'a permis de découvrir les sangaku est une source d'applications géométriques que je vous recommande vivement.

Bibliographie

BUSER P., 2005. *On the mathematical work of Robert Brooks, Dedicated to the memory of Robert Brooks*. Geometry, spectral theory, groups, and dynamics, pages 1-35, Contemp. Math., 387, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

DELERUE N., 2008. *Mathématiques japonaises*. Tangente 125 : 44-46.

HOKUSAI (1760-1849), Beaux Arts HS/TTM éditions, oct. 2014.

HORIUCHI A., 1994. *Takebe Katahiro (1664-1739)*, Dossiers Pour la science n°2 Les mathématiciens. p.88-95

HORIUCHI A., 1994. *Les mathématiques japonaises à l'époque d'Edo: (1600-1868) : une étude des travaux di Seki Takakazu (?-1708) et de Takebe Katahiro (1664-1739)*. Paris: J. Vrin.

http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Sangaku.shtml

HUVENT G., 2008. *Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises*. Dunod, Paris.

HUVENT G., 2013. http://gery.huvent.pagesperso-orange.fr/index_explorer_net.htm

SCHUMACHER M., Sangaku (I), Bulletin de la SSPMP n°125 05 | 2014
Sangaku (II), Bulletin de la SSPMP n°127 01 | 2015
http://www.vsmp.ch/crm/articles/